

異向材料點焊熱應力之邊界元素法分析

BEM Thermoelastic Analysis of Anisotropic with Concentrated Heat Sources

夏育群 賴宏智

Y.C. Shiah Heng-Chih Lai

摘要

使用邊界元素法分析彈性力學問題中之熱效應問題時，其邊界積分式中會產生一體積分項，目前最完善之解仍是將此體積分完全轉換為面積分，而此解析之轉換，最近才完成。在工程上之點焊問題如電路板上之焊點，在數值模擬中為使用集中熱源來處理，而集中熱源出現在內部時，此熱源將導致熱奇異性，此奇異點使得體積分轉換成面積分之過程造成困難。在本文中此問題藉由移除奇異點重新將體積分轉換成面積分，其使用靜偶合之方式得以解決，文中提供二數值範例來說明並驗證其正確性及可使用性。

關鍵詞：邊界元素法，異向性熱彈，集中熱源。

ABSTRACT

In elastic stress analysis using the BEM, an additional volume integral appears in the basic form of the boundary integral equation if thermal effects are considered. Perhaps the most elegant approach to restore this general numerical tool as a boundary solution technique is to transform exactly the volume integral into a series of boundary ones. For general anisotropic thermoelasticity in 2D, this was only achieved very recently. The presence of concentrated heat sources, however, leads to thermal singularities at these interior source points that give rise to additional difficulties in the volume-to-surface integral transformation. The problem is resolved in the present work by the removal of these singularities before proceeding with the transformation in a mapped plane. It is solved in a statically coupled manner, where the associated thermal field plays a critical role in the steps for the singularity removal and the analytical transformation. The two numerical examples are presented to demonstrate the veracity and applicability of the formulation.

Keywords : Boundary element method, anisotropic thermoelasticity, concentrated heat source.

一、前言

計算異向性材料內部點熱源或冷源應力場之彈性力學問題在工程上有許多非常重要應用。其範例如使用點、錫焊之電子電路版、單晶合金之內部冷卻及岩床熱源通道。在一些特定問題上其解析解都已完成(見 e.g. Clements (1973); Rahman (2003); Oin (1999); Sherief and Magahed (1999))，但在大部份的工程問題上依賴數值方法求解仍是必須的。其中大多數的工程問題分析都是採用有限差分法，有限元素法(FEM)，及邊界元素法(BEM)。當材料內部包含一集中點熱源的這些問

題之數值模型就要使用數個進似的模型去驗證，常常必須使用非常精細的格點或網格在點熱源之四周才能保證解的精確度，因此於網格的設計上增加了許多複雜度。

邊界元素法已經過有效率的計算被驗證過，而利用其特殊的特性來求解問題的邊界數值解。然而，在彈性力學裡明確地說明了，在邊界積分方程式(BIE)考慮熱效應時即會產生一體積分項。任何企圖直接對體積分式積分的方法將會破壞以邊界求解法求解之概念。近幾年有提出一些文章以排除此問題，其中含 Monte Carlo 法與全域扇形法，(Gipson and Camp, 1985; Camp and Gipson,

1992), 特定積分法(Lachat, 1975; Deb and Banerjee, 1990), 雙重交互關係法(Nardini and Brebbia, 1982), 多重交互關係法(Nowak, 1989; Nowak and Brebbia, 1989), 及正確轉換法(ETM) (Rizzo and Shippy (1977))。回顧一些最近發表之文章 Cheng, et al (2001)。其中正確轉換法(ETM), 發展起初為用於分析等向性材料之熱彈性理論, 基本上大部份的 BEM 解即如同一個完全之邊界解方法簡化近似。並可直接適用於新生裂紋及破壞問題。

雖然目前之 ETM 法可以有效地處理在等向性彈性力學問題上當考慮熱效應時所衍生的體積分問題, 而不同向性材料力學問題之相似轉換則是尚未出現, 因此 Shiah 與 Tan (1999a) 使用一域映射技術(Shiah 與 Tan, 1997)去簡化這個運算。靠著移除這奇異點之點熱源做為材料內部應力的運算, Shiah 與 Tan (1999b) 也成功地推導利用 Somigliana's 應變恆等式求解一般的熱效應內部點應力及應變結果。本文中, 主要為探討一般散佈於不同向性材料之中的點熱源熱彈性力學理論問題。然而此種工程問題雖然常見但卻也是非常地重要, 但在 BEM 法中卻相對少有此問題之討論。由於材料內部出現點熱源, 使得所有溫度相關參數如溫度及溫度梯度在點熱源處出現奇異點。為了確保因熱效應所產生之體積分式的解析解, 於數學解析中此奇異點必須由此區間中移除。求解靜偶合熱彈性力學問題其當前步驟為處理相關聯之不同向性材料之熱場。最後, 本文提供二個數值範例來說明並驗證其正確性及可使用性。

二、2D 熱場之點熱源

一般常用來討論靜偶合熱彈性力學問題的方法, 其熱場必須先存在。如同一個已被簡化的邊界積分式, 考慮區域內熱源分佈不但為其起始方法而且也是處理熱彈性力學邊界積分式不可缺少之部份。首先必須仔細地描述相關熱場。由於不同向性材料之熱傳導效應導致 n 個內部點熱源分離區域, 影響著部份的積分方程式如下式:

$$K_{ij}^{\Theta} \cdot_{ij} = - \sum_{m=1}^n S_m \delta_m (\bar{p} - \bar{M}_m) \quad , \quad (i, j = 1, 2) \quad (1)$$

此式中 Θ 為溫度之變化量, K_{ij} 為熱傳係數, 於方程式(1)中, 方程式右邊代表一不連續區域之點 m

之點熱源強度 S_m , \vec{M}_m 及 δ_m 代表於 p 點之 Dirac 總合方程式。由熱力學定理及 Onsager's 相互關係式, 於一般 2 維問題中熱傳係數必須滿足下列之條件:

$$K_{11} > 0, K_{22} > 0, K_{12} = K_{21}, K_{11}K_{22} - K_{12}^2 > 0 \quad (2)$$

使用 BEM 近似法探討不同向性材料之熱傳問題其基本原理為使方程式(1)之微分運算及 Green 定理, 而此法最近也被 Mera et al (2001)發表。使用一般之近似法使方程式(1)降階則其標準式之空間座標將會改變, 如此一來既可數值化一般之非等向性材料問題。藉由旋轉卡氏座標軸之主軸(ζ_1, ζ_2)去計算使其相乘項消去。而旋轉此統御方程式之卡氏座標系統並忽略熱源而得下式:

$$K_1^* \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_1^2} + K_2^* \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_2^2} = 0 \quad (3)$$

這裡 K_i^* 代表在 i 方向主軸之熱傳導係數。已被使用之方法如有限元素法(Segerlind, 1984), 有限差分法(Li, 1983), 及 BEM 法(Bruce and Lejeune, 1989)。藉由調整主座標可以把方程式(3)更進一步地化成 Laplace 方程式, 而此論述可參考 Banerjee 與 Butterfield (1981) 之研究。

經由上述之變化以近似地數值化此非等向性區域問題, 即如同 Shiah 及 Tan (1998), 使用一線性座標轉換而 Θ 在此轉換區域中靠著標準之 Laplace 方程式來定義。由二維的例子中, 這線性轉換於此二座標系統也許可以被寫成如下列之行列式表示:

$$\begin{aligned} [\hat{x}_1 \hat{x}_2]^T &= [F(K_{ij})][x_1 x_2]^T \\ [x_1 x_2]^T &= [F^{-1}(K_{ij})][\hat{x}_1 \hat{x}_2]^T \end{aligned} \quad (4)$$

上式之 $F = [F(K_{ij})]$ ，及 $F^{-1} = [F^{-1}(K_{ij})]$ ，因不變量之關係其各別轉換及反轉換矩陣，其組成之元素各別為 $[F_{mn}(K_{ij})]$ 及 $[F_{mn}^{-1}(K_{ij})]$ 。此線性轉換求解等向性潛變理論儘管在一映射平面其上之扭曲域仍有其不同之優勢而允許使用任何之標準 BME 方法來完成此解析解。這主要解之變數如同溫度之轉換必須存在一未變化之相同點於物理上之映射平面。其通過邊界之法線梯度值經由(Shiah 及 Tan (1998))求得

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dn} &= \left(\Theta_{,1} F_{11} + \Theta_{,2} F_{21} \right) n_1 + \left(\Theta_{,1} F_{12} + \Theta_{,2} F_{22} \right) n_2 \\ \frac{d\Theta}{d\hat{n}} &= \left(\Theta_{,1} F_{11}^{-1} + \Theta_{,2} F_{21}^{-1} \right) \hat{n}_1 + \left(\Theta_{,1} F_{12}^{-1} + \Theta_{,2} F_{22}^{-1} \right) \hat{n}_2 \end{aligned} \quad (5)$$

上式之 n_i 及 \hat{n}_i 代表在邊界域上之單位向外法線向量之組成其各自定義在一物理及一映射域上；

而底線標示處為在被 \hat{x}_i 座標系統所定義之映射平面。依照 Shiah 與 Tan (1998) 所論述，此映射可寫成下列格式：

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta}/K_{11} & 0 \\ -K_{12}/K_{11} & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = K_{11}K_{22} - K_{12}^2 \\ \mathbf{F}^{-1} &= \begin{pmatrix} K_{11}/\sqrt{\Delta} & 0 \\ K_{12}/\sqrt{\Delta} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

將上式轉換並改寫，而此非等向性區域包括內部集中熱源部份被下式所控制：

$$\Theta_{,ii} = - \sum_{m=1}^n S'_m \delta'_m (\hat{p} - \hat{M}_m) \quad (7)$$

S'_m 代表與此映射平面相等上之熱源強度且其定義如下：

$$S'_m = S_m K_{11} / \Delta \quad (8)$$

此步驟將使目前的非等向性問題降階成等向性問題。其 BEM 法之數值解將於下述簡單地回顧。如同相關之 BEM 文獻上所述的，沿著邊界上之解域其溫度的改變量 Θ 及其法線梯度 $q (=d\Theta/dn)$ ， n_i 為其單位向外法線向量，其靠著下列之邊界積分方程式所定義：

$$\begin{aligned} c(\hat{P})\Theta(\hat{P}) &= \int_{\hat{S}} q(\hat{Q})W(\hat{P},\hat{Q})d\hat{S}(\hat{Q}) - \int_{\hat{S}} \Theta(\hat{Q})V(\hat{P},\hat{Q})d\hat{S}(\hat{Q}) - \sum_{m=1}^n S'_m W(\hat{P},\hat{M}_m) \end{aligned} \quad (9)$$

上式之 \hat{P} 及 \hat{Q} 分別代表在此扭曲邊界區域 \hat{S} 內

之源點及域點， \hat{M}_m 表 m 個內部內熱源點，且

$\hat{}$ (hat sign) 表示為映射平面之意。且於方程式

(9)， $c(\hat{P})$ 之值與點 \hat{P} 之幾何位置有關； $W(\hat{P},\hat{Q})$

及 $V(\hat{P},\hat{Q})$ 各別為溫度及法線梯度之基本解，如下述所定義：

$$W(\hat{P},\hat{Q}) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\hat{r}}\right), \quad V(\hat{P},\hat{Q}) = \frac{-1}{2\pi\hat{r}} \hat{r}_{,i} \hat{n}_{i\perp} \quad (10)$$

這裡 \hat{r} 表示為 \hat{P} 及 \hat{Q} 二者之間之距離。求解方程式(9)，此解域在此線元素之集合是不連續的，其個別地被定義於有限個數之節點中。重述方程式(9)，每一獨立之節點及其適當之形狀函數由於修正其解變數將導致所有節點其未知溫度或法線梯度之同步方程式被修正。注意，無論如何，其配置過程都是為了完成求解扭曲邊界之邊界積分方程式所需要的。此輸入之 Neumann 邊界條件必須依下式直接被轉換：

$$\frac{d\Theta}{d\hat{n}} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_1} \frac{K_{11}}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\partial\Theta}{\partial x_2} \frac{K_{12}}{\sqrt{\Delta}} \right) \hat{n}_1 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial x_2} \right) \hat{n}_2 \quad (11)$$

適當地設定邊界條件，在此節點處未知之溫度或溫度法線梯度同步方程式目前都使用標準矩陣法求解。然而此解之近似梯度值需要被進一步之處

理以得到與實際物理域上相同的值，如下式所述：

$$\frac{d\Theta}{dn} = \hat{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{F} \frac{\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}}^T}{|\mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}}|} \quad (12)$$

$\hat{\mathbf{n}}$ 表示為在映射域邊界上之外法線向量，以 \hat{n}_i 為在 \hat{x}_i 方向之組成來表示。且 $\hat{\mathbf{p}}_i$ 為沿著映射邊界之溫度梯度，其定義如下：

$$\hat{\mathbf{p}}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{x}_1} & \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} \quad (13)$$

並且其可以使用下式計算

$$\hat{\mathbf{p}}_i^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{x}_1} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{x}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{s}_1 & \hat{s}_2 \\ \hat{n}_1 & \hat{n}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{s}} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \hat{n}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

上式之 \hat{s}_i 為沿路徑 \hat{s} 方向之單位向量之集合。在方程式(14)此扭曲區域之溫度梯度 $\partial \Theta / \partial \hat{n}$ 可以直接由 BIE 之解所得，而其它之溫度梯度 $\partial \Theta / \partial \hat{s}$ 也可以使用標準之數值積分法導入形狀函數方程式來求解。一旦此熱傳導問題被解出，則此相關之應力方程式之解也可以被解出其方法如下述。

三、2D 內部點熱源之熱彈性力學

如同一般綜合性之熱彈性力學問題分析，熱傳及彈性問題必須要一起被考慮。使用 BEM 法以公式描述一平面上非等向性材料彈性物質其範圍之邊界其位移 u_i 及其拉力 t_i 其關係如下式：

$$\begin{aligned} & C_{ij}(P) u_i(P) + \int_S u_i(Q) T_{ij}(P, Q) dS \\ & = \int_S t_i(Q) U_{ij}(P, Q) dS + \int_{\Omega} X_i(q) U_{ij}(P, q) d\Omega \end{aligned} \quad (15)$$

上式之 Q 及 q 各別代表在此邊界 S 及區域 Ω 之中的點，而 P 為在 S 上之熱源點。在方程式(15)， C_{ij} 為幾何邊界上之熱源點 P 之相關係數；且 X_i 代表在此區域內之溫度變化其等效之體內力項。並且

$U_{ij}(P, q)$ 為其位移之基本解如同下式所述：

$$U_{ij}(P, q) = 2 \operatorname{Re} \{ r_{i1} A_{j1} \log z_1 + r_{i2} A_{j2} \log z_2 \} \quad (16)$$

這裡之 r_{ij} 及 A_{ji} 為材料物性，被一集合量所表示， $\operatorname{Re}\{\}$ 是複變函數之實部運算子，且 z_i 為一廣義之複變數。此廣義之複變數被特徵根所定義，以及不同座標間域點 $Q(x_1, x_2)$ 及負載或源點 $P(x_{p1}, x_{p2})$ 如下式所述：

$$z_i = (x_1 - x_{p1}) + \mu_i (x_2 - x_{p2}) = \zeta_1 + \mu_i \zeta_2 \quad (17)$$

ζ_i 代表此本地座標內源點之起始位置。且方程式(15)中其 $T_{ij}(P, Q)$ 為一拉應力基本解，其詳細的說明都已發表在 BEM 之相關文獻上。 $T_{ij}(P, Q)$ 其公式化並不複雜，即不在此重述。在方程式(16)，相同之體內力 X_i 可以被寫成 $X_i = -\gamma_{ij} \Theta_{,j}$ 此處 γ_{ij} 為靠 $\gamma_{ij} = c_{ijkl} \alpha_{kl}$ 所給定之係數， c_{ijkl} 本質為原始勁度

矩陣而 α_{kl} 本質為熱膨脹係數。將此項並加上熱拉力項代入(17)式，此積分方程式即完整地將熱效應考慮進來，如下式所述：

$$\begin{aligned} & C_{ij} u_i(P) + \int_S u_i(Q) T_{ij}(P, Q) dS \\ & = \int_S t_i(Q) U_{ij}(P, Q) dS + \int_S \gamma_{ik} n_k \Theta(Q) U_{ij}(P, Q) dS \\ & \quad - \int_{\Omega} \gamma_{ik} \Theta_{,k}(q) U_{ij}(P, q) d\Omega \end{aligned} \quad (18)$$

如同目前 Shiah 與 Tan (1999a) 所發表之論文中所述，在方程式(18)等號右邊之最後一項，此項為一域積分(表示成 VI)，其可以由方程式(4)改寫成到對映域，如下式：

$$\begin{aligned} VI_j &= - \int_{\Omega} \gamma_{ik} \Theta_{,k}(q) U_{ij}(P, q) d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} \gamma_{ik} \Theta_{,k}(\hat{q}) U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (19)$$

由固定係數 γ_{ij} 產生之元素矩陣如下

$$\gamma_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \frac{-\gamma_{11} K_{12} + \gamma_{12} K_{11}}{\sqrt{\Delta}} \\ \gamma_{21} & \frac{-\gamma_{21} K_{12} + \gamma_{22} K_{11}}{\sqrt{\Delta}} \end{pmatrix} \quad (20)$$

在 BEM 解析時需確保此邊界能夠被建構，而此體積分式必須被轉換成一邊界積分式。然而此類之轉換，其積分式必須在此區域間之每一處都可解析。如前述，這些靜偶合問題皆必須連同熱及彈性域一起討論。方程式(9)為空間微分方程式所組成，在區域內之任意點其溫度梯度 $\Theta_{,k}$ 可由下式

得到：

$$\begin{aligned} \Theta_{,k}(\hat{p}) &= \int_{\hat{S}} q(\hat{Q}) W_{,k}(\hat{p}, \hat{Q}) d\hat{S}(\hat{Q}) - \int_{\hat{S}} \Theta(\hat{Q}) V_{,k}(\hat{p}, \hat{Q}) d\hat{S}(\hat{Q}) - \sum_{m=1}^n S'_m W_{,k}(\hat{p}, \hat{M}_m) \\ &= b_{,k}(\hat{p}, \hat{Q}) - \sum_{m=1}^n S'_m W_{,k}(\hat{p}, \hat{M}_m) \end{aligned} \quad (21)$$

$b_{,k}(\hat{p}, \hat{Q})$ 為代表一邊界值而方程式

$W_{,k}(\hat{p}, \hat{M}_m)$ 則如下式所述：

$$W_{,k}(\hat{p}, \hat{M}_m) = \frac{(\hat{x}_k^{(\hat{p})} - \hat{x}_k^{(\hat{M}_m)})}{2\pi \hat{r}^2} \quad (22)$$

回到方程式(21)，當忽略方程式(9)內部點之計算時而在式中之係數 $c(\hat{P}) = 1$ 。當 $\hat{r} = 0$ 且

$\hat{x}_k^{(\hat{M}_m)} = \hat{x}_k^{(\hat{p})}$ 時則此內部熱源點即為其奇異點。而

$\Theta_{,k}(\hat{p})$ 即如同方程式(21)所述，在回到方程式

(19)，除非將這些奇異點移除否則將無法完成此積分轉換之處理。其主要的目的，為使扭曲域被數個被切割之子域所取代如圖.1，這裡的主要子域 $\hat{\Omega}_0$ 是無約束的奇異點且每一圓形子域 $\hat{\Omega}_m$ 在其

圓心處 \hat{M}_m 皆含有一點熱源，因此其積分域可以表示成下式：

$$\begin{aligned} VI_j &= VI_j^{(\hat{\Omega}_0)} + \sum_{m=1}^n VI_j^{(\hat{\Omega}_m)} \\ &= -\int_{\hat{\Omega}_0} \gamma_{ik} \Theta_{,k}(\hat{q}) U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) d\hat{\Omega} - \sum_{m=1}^n \int_{\hat{\Omega}_m} \gamma_{ik} \Theta_{,k}(\hat{q}) U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (23)$$

現在必需來細查每一個由 $VI_j^{(\hat{\Omega}_m)}$ 所表示的圓形子域之體積分式，使用一般之微分方法始其半徑變成零。將 $\Theta_{,k}(\hat{q})$ 用方程式(21)來代替，並且代入至方程式(23)之最後一項並且得到此半徑之極限值，而產生下式：

$$\begin{aligned} VI_j^{(\hat{\Omega}_m)} &= -\int_{\hat{\Omega}_m} \gamma_{ik} \Theta_{,k}(\hat{q}) U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) d\hat{\Omega} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} -\int_0^{2\pi} \int_0^\rho \gamma_{ik} \left[b_{,k}(\hat{q}, \hat{Q}) - \sum_{m=1}^n S'_m W_{,k}(\hat{q}, \hat{M}_m) \right] U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) r dr d\theta \end{aligned} \quad (24)$$

$b_{,k}(\hat{q}, \hat{Q})$ 項明顯地與邊界值有關，當半徑 ρ 趨近零時此項將被消去。其體積分式可以由下式所表示：

$$VI_j^{(\hat{\Omega}_m)} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \gamma_{ik} \sum_{m=1}^n \frac{S'_m (\hat{x}_k^{(\hat{M}_m)} - \hat{x}_k^{(\hat{q})})}{2\pi [(\hat{x}_1^{(\hat{M}_m)} - \hat{x}_1^{(\hat{q})})^2 + (\hat{x}_2^{(\hat{M}_m)} - \hat{x}_2^{(\hat{q})})^2]} U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) r dr d\theta \quad (25)$$

很顯然的，當內部之區域點 \hat{q} 與此 m 個熱源點 \hat{M}_m 並沒有落在相同之子域時，相關聯之體積分項將被消去。如此一來則可以證明上述之體積分式如下：

$$\begin{aligned} VI_j^{(\hat{\Omega}_m)} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\rho \frac{-S'_m (\gamma_{i1} r \cos \theta + \gamma_{i2} r \sin \theta)}{2\pi^2} U_{ij}(\hat{P}, \hat{M}_m) r dr d\theta \\ &= -\frac{S'_m}{2\pi} U_{ij}(\hat{P}, \hat{M}_m) \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} (\gamma_{i1} \cos \theta + \gamma_{i2} \sin \theta) dr d\theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

由方程式(23)與(26)，可得另一體積分式如下：

$$VI_j = -\int_{\hat{\Omega}_0} \gamma_{ik} \Theta_{,k}(\hat{q}) U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) d\hat{\Omega} \quad (27)$$

在此無奇異點之對映區域上其體積分可以藉由 Green's 定理將其轉換成邊界積分式。其詳細之說明請參閱 Shiah 與 Tan (1999a)，方程式(27)其體積分轉換後則可寫成下式：

$$\begin{aligned} VI_j &= -\int_{\hat{S}} \gamma_{ik} U_{ij}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,k}(\hat{Q}) n_k d\hat{S} \\ &\quad + \int_{\hat{S}} (\gamma_{ik} Q_{ijk,l}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,l}(\hat{Q}) - \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,l}(\hat{Q})) n_l d\hat{S} \\ &\quad + \int_{\hat{\Omega}_0} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{q}) \Theta_{,k}(\hat{q}) d\hat{\Omega} \end{aligned} \quad (28)$$

Q_{ijk} 與 $Q_{ijk,t}$ 其定義如下：

$$Q_{ijk} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{r_{i1} A_{j1} \mu_{k1} z_1 \log(z_1)}{(\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2)} + \frac{r_{i2} A_{j2} \mu_{k2} z_2 \log(z_2)}{(\mu_{21}^2 + \mu_{22}^2)} \right\} \quad (29)$$

$$Q_{ijk,t} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{r_{i1} A_{j1} \mu_{k1} \mu_{it} (1 + \log(z_1))}{(\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2)} + \frac{r_{i2} A_{j2} \mu_{k2} \mu_{it} (1 + \log(z_2))}{(\mu_{21}^2 + \mu_{22}^2)} \right\} \quad (30)$$

在方程式(29)及(30)， μ_{ji} 係數之定義如下：

$$\mu_{ji} = \begin{pmatrix} \frac{K_{11} + \mu_j K_{12}}{\sqrt{\Delta}} & \frac{K_{11} + \mu_2 K_{12}}{\sqrt{\Delta}} \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

由於方程式(7)可讓方程式(28)之最後一項變為零，因此會將移除在子域 $\hat{\Omega}_0$ 之內部點 \hat{q} 的集中熱源。然而在方程式(28)其邊界積分必需要沿著子域 $\hat{\Omega}_0$ 其上之所有表面來計算，包含了外緣邊界 \hat{S}_0

及每一個內部區域的邊界 $\hat{S}_1, \dots, \hat{S}_m$ 如圖.1。請注意，其內邊界面及外邊界面之積分方向是相反的，如此將方程式(28)則改寫成下式：

$$\begin{aligned} VI_J = & - \int_{\hat{S}_0} \gamma_{ik} U_{ij}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta(\hat{Q}) n_k d\hat{S} \\ & + \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{S}_m} \gamma_{ik} U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) \Theta(\hat{q}) n_k (\rho d\theta) \\ & + \int_{\hat{S}_0} \gamma_{ik} Q_{ijk,t}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta(\hat{Q}) n_t d\hat{S} \\ & - \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{S}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk,t}(\hat{P}, \hat{q}) \Theta(\hat{q}) n_t (\rho d\theta) \\ & - \int_{\hat{S}_0} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,t}(\hat{Q}) n_t d\hat{S} \\ & + \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{S}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{q}) \Theta_{,t}(\hat{q}) n_t (\rho d\theta) \end{aligned} \quad (32)$$

為求得方程式(32)其二極限項之數值，必須先考慮內部溫度場 $\Theta(\hat{q})$ ，其方程式如下：

$$\begin{aligned} \Theta(\hat{q}) = & \int_{\hat{S}_0} q(\hat{Q}) W(\hat{q}, \hat{Q}) d\hat{S} - \int_{\hat{S}_0} \Theta(\hat{Q}) V(\hat{q}, \hat{Q}) d\hat{S} - \sum_{m=1}^n S'_m W(\hat{q}, \hat{M}_m) \\ = & b_o(\hat{q}, \hat{Q}) - \sum_{m=1}^n \frac{S'_m}{2\pi} \log \frac{1}{\sqrt{(\hat{x}_1^{(\hat{M}_m)} - \hat{x}_1^{(\hat{q})})^2 + (\hat{x}_2^{(\hat{M}_m)} - \hat{x}_2^{(\hat{q})})^2}} \end{aligned} \quad (33)$$

$b_o(\hat{q}, \hat{Q})$ 表示為推論之邊界值，方程式如下：

$$b_o(\hat{q}, \hat{Q}) = \int_{\hat{S}_0} q(\hat{Q}) W(\hat{q}, \hat{Q}) d\hat{S} - \int_{\hat{S}_0} \Theta(\hat{Q}) V(\hat{q}, \hat{Q}) d\hat{S} \quad (34)$$

回到方程式(33)，在方程式(9) 中其內部點解只有係數 $c(\hat{P})$ 於數值計算中變小。如同之前所提到的，當內部點 \hat{q} 與熱源點重疊時則會變成奇異點。因此將方程式(33)改寫成下式：

$$\begin{aligned} \Theta(\hat{q}) = & B(\hat{q}, \hat{Q}) + \frac{S'_m}{2\pi} \log \sqrt{(\hat{x}_1^{(\hat{M}_m)} - \hat{x}_1^{(\hat{q})})^2 + (\hat{x}_2^{(\hat{M}_m)} - \hat{x}_2^{(\hat{q})})^2} \\ = & B(\hat{q}, \hat{Q}) + \frac{S'_m}{2\pi} \log \rho \end{aligned} \quad (35)$$

$B(\hat{q}, \hat{Q})$ 為邊界值，將方程式(35)代入到方程式(32)中可以得到 ρ 之極限值趨近於零，因此得到：

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{S}_m} \gamma_{ik} U_{ij}(\hat{P}, \hat{q}) \left(B(\hat{q}, \hat{Q}) + \frac{S'_m}{2\pi} \log \rho \right) n_k (\rho d\theta) = 0 \quad (36)$$

及

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{S}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk,t}(\hat{P}, \hat{q}) \left(B(\hat{q}, \hat{Q}) + \frac{S'_m}{2\pi} \log \rho \right) n_t (\rho d\theta) = 0 \quad (37)$$

並將方程式(32)之其它剩餘項做轉換處理。將

$\Theta_{,t}(\hat{P})$ 項以方程式(21)取代而得下式：

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{S}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{q}) \Theta_{,t}(\hat{q}) n_t (\rho d\theta) \\ = & \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{S}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{q}) \left[\left(b_1(\hat{q}, \hat{Q}) - \sum_{m=1}^n S'_m W_{,1}(\hat{q}, \hat{M}_m) \right) \cos \theta \right. \\ & \left. + \left(b_2(\hat{q}, \hat{Q}) - \sum_{m=1}^n S'_m W_{,2}(\hat{q}, \hat{M}_m) \right) \sin \theta \right] (\rho d\theta) \end{aligned} \quad (38)$$

由於 $W_{,t}(\hat{q}, \hat{M}_m)$ 為奇異但當點 \hat{q} 是在表面 \hat{S}_m

上且非常近似 \hat{M}_m 時，則方程式(38)可以改寫成下

式：

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{s}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,i}(\hat{Q}) n_i(\rho d\theta) \\ &= \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \hat{Q} \rightarrow \hat{M}_m}} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{s}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m) \left[\begin{aligned} & \left(B_1(\hat{M}_m, \hat{Q}) - S'_m W_{1,i}(\hat{Q}, \hat{M}_m) \right) \cos \theta \\ & + \left(B_2(\hat{M}_m, \hat{Q}) - S'_m W_{2,i}(\hat{Q}, \hat{M}_m) \right) \sin \theta \end{aligned} \right] (\rho d\theta) \end{aligned} \quad (39)$$

$B_i(\hat{M}_m, \hat{Q})$ 表示為在 $\lim_{\hat{Q} \rightarrow \hat{M}_m} \left(b_i(\hat{Q}, \hat{Q}) - \sum_{m=1}^n S'_m W_{i,t}(\hat{Q}, \hat{M}_m) \right)$ 此部份之邊界。當 ρ 近似於零時，方程式(39)其所有的邊界值可以被輕易地消去。如圖.1 所示，外法線向量 \hat{n} 其方向指向圓心，利用方程式(22)而改寫方程式(39)得到下式：

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{s}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,i}(\hat{Q}) n_i(\rho d\theta) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{s}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m) \left[\left(S'_m \frac{(\hat{x}_1^m - \hat{x}_1^M)}{2\rho^2} \right) (-\cos \theta) + \left(-S'_m \frac{(\hat{x}_2^m - \hat{x}_2^M)}{2\rho^2} \right) (-\sin \theta) \right] (\rho d\theta) \end{aligned} \quad (40)$$

沿著積分路徑 \hat{S}_m ，區域點 \hat{Q} 之座標給定如下：

$$\hat{x}_1^m = \hat{x}_1^M + \rho \cos \theta, \quad \hat{x}_2^m = \hat{x}_2^M + \rho \sin \theta \quad (41)$$

因此方程式(40)可改寫成下式：

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{s}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,i}(\hat{Q}) n_i(\rho d\theta) \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{Q}) \left[\left(S'_m \frac{\rho \cos \theta}{2\rho^2} \right) (-\cos \theta) + \left(S'_m \frac{\rho \sin \theta}{2\rho^2} \right) (-\sin \theta) \right] (\rho d\theta) \\ &= - \sum_{m=1}^n \int_0^{2\pi} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m) \left(\frac{S'_m}{2\pi} \right) d\theta \\ &= - \sum_{m=1}^n S'_m \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m) \end{aligned} \quad (42)$$

由於熱效應之體·面積分轉換已經完成。於方程式(19)所附加之體積分式計算後得下式：

$$\begin{aligned} VI_j = & - \int_{\hat{s}_0} \gamma_{ik} U_{ij}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta(\hat{Q}) n_k d\hat{s} + \int_{\hat{s}_0} \gamma_{ik} Q_{ijk,t}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta(\hat{Q}) n_i d\hat{s} \\ & - \int_{\hat{s}_0} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,i}(\hat{Q}) n_k d\hat{s} - \sum_{m=1}^n S'_m \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m) \end{aligned} \quad (43)$$

在工業上常用的焊接工法，其常於鉸件邊界上產生集中點熱源。其最初之方程式模型也可以被修正以符合實際模型。其主要目的為當一點熱源位於一角點且其角度為 λ 時如圖.3 所示。如上述過程將方程式(42)排除奇異點熱源項仍舊是合理的，如下式所述：

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \sum_{m=1}^n \int_{\hat{s}_m} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{Q}) \Theta_{,i}(\hat{Q}) n_i(\rho d\theta) \\ &= - \sum_{m=1}^n \int_0^{\theta_2} \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m) \left(\frac{S'_m}{2\pi} \right) d\theta \\ &= - \sum_{m=1}^n S'_m \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m) (\lambda_m / 2\pi) \end{aligned} \quad (44)$$

我們都知道在此角落所夾之夾角在此映射平面上是很明顯地已被扭曲了。由於 λ_m 可以使用在二相鄰元素轉角上之單位向外向量輕易地計算出來，所以就不在進一步地談論其相關之方法。雖然此修正為說明邊界上存在點熱源之重要地根據，但於建立邊界上的熱源點之網格模型時仍必須小心。於沿著邊界做積分處理時，而其積分路徑上是不能夠存在著奇異點。在數學上，將積分路徑非常接近地繞過奇異點並依該其積分路徑來處理其邊界積分式這樣即可消除奇異點。然而，這將使得其數值化變得困難，因為在此對數方程式

$Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m)$ 其 \hat{P} 及 \hat{M}_m 其二點間之距離將非常

接近零。為避免此類問題，必需重新放置這些分散的熱源點，使其非常接近邊界但又不能剛好於

邊界上。然後由於此對數方程式 $Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m)$ 極

限值的關係，使得這些分散的點熱源又不能太過靠近於邊界。經由幾個數值化案例的驗證後，並測試適當的距離，我們找到其適當的 d/L (如圖.4) 其區間由 $1.0E-3$ 至 $1.0E-2$ 在此區間中可以求得較為正確之結果。

然而，在一般情況下還有留下一些問題要處理。當積分函數中有 $\log(z)$ 這一項時，則其不能於此區域中完全解析。而這些問題已在 Zhang, Tan 與 Afagh (1996a)，以及 Shiah 與 Tan (1999a) 的論述中有詳細地說明了。假若定義 z 之主要幅角值為 $-\pi < \arg(z) < \pi$ ，而 $\log(z)$ 是無法沿著負 ζ_1 軸解析地。這將使得前述之體積分轉換無效。雖然這個問題可以藉由在次定義幅角值來避開，但總不可能以重新定義幅值 $\arg(z)$ 之範圍的方法來保證 $\log(z)$ 在能夠此區域中夠解析完全。舉例，如圖.2 之區域。假設由任意點沿著內部邊界來投影到任

意方向上，其都會切過此區域。然而此類的問題 Zhang, Tan 及 Afagh (1996b) 提出之理論皆有詳細之說明，其所得之結果為一額外的線積分級數項，且沿著負 ζ_1 軸有效地修正了表面積分的解析性，藉以消去因 $\log(z)$ 函數沿著此軸所產生之不連續項。同樣表示於一般情況中，當負 ζ_1 軸在區間 $(l_{2m-1}, l_{2m-2}), (l_{2m-3}, l_{2m-3}), \dots, (l_1, l_0)$ 上切過全域 m 次，而其包括分散於邊界內部點熱源之完整的平面異向性熱彈邊界積分式則可表示成：

$$\begin{aligned} & C_{ij} u_i(P) + \int_S u_i(Q) T_{ij}(P, Q) dS \\ &= \int_S t_i(Q) U_{ij}(P, Q) dS + \int_S \gamma_{ik} n_k U_{ij}(P, Q) \Theta dS \\ & - \int_S \gamma_{ik} n_k U_{ij}(P, Q) \Theta d\hat{S} \\ & + \int_S [\gamma_{ik} Q_{ijk}(P, Q) \Theta - \gamma_{ik} Q_{ijk}(P, Q) \Theta_i] n_i d\hat{S} \\ & + \sum_{n=1}^m \int_{l_{2n-1}}^{l_{2n-2}} L_j(\zeta_1) d\zeta_1 - \sum_{m=1}^n S'_m \gamma_{ik} Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m) (\lambda_m / 2\pi) \end{aligned} \quad (45)$$

積分式 $L_j(\zeta_1)$ 其定義如下：

$$\begin{aligned} L_j(\zeta_1) &= -4\pi \Theta \left(\frac{K_{12}}{K_{11}} \gamma_{12} + \frac{\sqrt{\Delta}}{K_{11}} \gamma_{12} \right) \text{Im} \{ r_{11} A_{j1} + r_{12} A_{j2} \} \\ &+ 4\pi \Theta \gamma_{ik} \left\{ \frac{K_{12}}{K_{11}} \text{Im} \left\{ \frac{r_{11} A_{j1} \mu_{11} \mu_{k1}}{\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2} + \frac{r_{12} A_{j2} \mu_{12} \mu_{k2}}{\mu_{12}^2 + \mu_{22}^2} \right\} \right. \\ &+ \left. \frac{\sqrt{\Delta}}{K_{11}} \text{Im} \left\{ \frac{r_{11} A_{j1} \mu_{21} \mu_{k1}}{\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2} + \frac{r_{12} A_{j2} \mu_{22} \mu_{k2}}{\mu_{12}^2 + \mu_{22}^2} \right\} \right\} \\ &- 4\pi \gamma_{ik} \left(\frac{K_{12}}{K_{11}} \Theta_{,1} + \Theta_{,2} \frac{\sqrt{\Delta}}{K_{11}} \right) \text{Im} \left\{ \frac{r_{11} A_{j1} \mu_{k1}}{\mu_{11}^2 + \mu_{21}^2} + \frac{r_{12} A_{j2} \mu_{k2}}{\mu_{12}^2 + \mu_{22}^2} \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

很顯然的，當一點熱源落於被負 ζ_1 軸上而其為分支切割處時，則 $Q_{ijk}(\hat{P}, \hat{M}_m)$ 會出現在方程式(44)之最後一項，因此將發生多重值問題。為了簡化相關域，此問題可以靠著重新定義幅角來避免其分支切割之方向與向外垂直向量對正。然而一多重圍線區問題必須使熱源集中點之落點避開被負 ζ_1 軸所切開之區域上。克服這些難題為其最好的解法方式，如一般多重圍線區時避免計算其方程式(44)所額外產生之線性方程式，使得子圍線區可以使用一般之 BEM 法來解析，並可每一子圍線區可形成單一連續子域。使用下述的例子來証實上

述公式的正確性及適用性：

四、數值範例

在此提供二個數學範例以驗證邊界元程式數值計算之正確性，第一個範例為一圓盤其 $R=1$ ，材質為鋁合金(Aluminum Alloys, General)其特性如下：

E_{11}	ν	G_{12}	α_{11}	K_{11}
70GPa	0.33	26.136GPa	6.3 μ m/m- $^{\circ}$ C	190W/m-K

在圓盤中心處有一裂紋其長度為 a 如圖.5，裂紋處為絕熱及圓盤邊界溫度設定為 0 度，散熱點距離與圓盤半徑比為 $r/R=0.2, 0.4, 0.6$ 及 0.8 ，裂紋長度與圓盤半徑比為 $a/R=0.5$ 及 1 ，散熱強度 $S=-100W$ ，使用邊界元素法之子分域技術來分析裂紋問題，共計使用 88 個二階元素。本文中主要為利用 BEM 解及 ANSYS 解來比對解的正確性，ANSYS 分析模型如圖.6 所示，元素數量為 1474 個二階元素(分析熱效應使用 PLANE77 元素、分析力使用 PLANE82 元素)，ANSYS 為利用 J 積分法來計算裂紋強度因子，BEM 解則利用 $1/4$ 點裂紋元素來計算裂紋強度因子相關細節請參考(Tan, C.L., Gao, Y.L. and Afagh, 1992)，其二者所計算出來的值如附表.1。

K_0 因子使用 $K_0 = E^* \alpha^* (-S) \sqrt{\pi a} / KR$ 來做正交化，並分別以裂紋長度各為 $0.5mm$ 及 $1mm$ 之 BEM 及 ANSYS 圓盤圓周上之 σ_{rr} 法線應力及 $\sigma_{\theta\theta}$ 切線應力運算結果如圖.7 及圖.8 所示，由表.1、圖.7 及圖.8 之結果可以得知 BEM 解及 FEM 解非常近似。

第二個範例也為全圓其 $R=1$ ，材質為玻璃纖維其特性如下：

E_{11}^*/E_{22}^*	ν^*	G_{12}^*/E_{22}^*	$\eta_{12,1}^*$	$\eta_{12,2}^*$	$\alpha_{11}^*/\alpha_{22}^*$	K_{11}^*/K_{22}^*
55/21	0.3	9.7/21	0	0	6.3/20.0	3.46/0.35

裂紋長度與圓盤半徑比為 $a/R=0.5$ 及 1 ，散熱點距

離與圓盤半徑比為 $r/R=0.2$ ，散熱強度 $S=-100W$ ，異向性材料角度為 0° 、 15° 、 30° 、 45° 、 60° 、 75° 及 90° ，圓盤圓周溫度為 0° 度並設定其位移量為 0 ，裂紋處則為絕熱，其 BEM 模型及玻璃纖維方向定義如圖.7 所示，由於 ANSYS 無法計算異向性材料之裂紋強度因子因此只列出 BEM 計算結果如圖.10、圖.11。

取裂紋長度與圓盤半徑比為 $a/R=0.5$ ，散熱點距離與圓盤半徑比為 $r/R=0.2$ ，散熱強度 $S=-100W$ ，異向性材料角度為 30° 度之條件比對 ANSYS 及 BEM 所計算出之圓盤圓周上各方向應力值 (σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{xy}) 來比對其正確性如圖.12。在分析圖形上分別在圓盤分析點位置於 0° 、 90° 、 180° 、 270° 等部份於分析異材性材時由於其為分域法之關係造成數值誤差較大在本文中並不多做討論，但就以分析其結果及趨勢可以得知 ANSYS 與 BEM 計算之數值解是非常近似地。

四、結論

以邊界元素法來探討二維非等向材料之熱彈性力學，當轉換以一般區域來考慮時熱負載將使其方程式本身出現體積分項。精確轉換一個邊界連續區之間體積分項是最近才發展出來的。然而，當集中熱源出現在非等向性材料內部時，其在熱源點處將出現熱奇異性而使其轉換無效化。雖然此類問題常於工程上出現，但在邊界元素法分析之相關文獻上討論非等向性材料集中熱源之熱彈問題仍是非常少有的。本論文主要為將區域中之奇異點移除後在將其邊界方程式予以轉換。使用邊界積分方程法將此邊界中之集中熱源問題公式化。此完善的公式已在邊界元素法電腦程式工具中。公式的正確性已經由 BEM 解與 ANSYS 解的相互查証下已確認，而其在熱源點處周圍需有更細密的網格。本論文為一併使用此二種有效率的工具來分析 2 維非等向性材料集中熱源之熱彈問題。

參考文獻

Shiah, Y. C. and Tan, C. L., 1999a.

Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity, *Computational Mechanics* 23, 87-96.

1. Mera, N.S., Elliott, L., Ingham, D.B., and Lesnic, D., 2001, A Comparison of Boundary Element Method Formulations for Steady State Anisotropic Heat Conduction Problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 25, pp. 115-128.
2. Banerjee, P.K. and Butterfield, R. (1981), *Boundary Element Methods in Engineering Science*, McGraw-Hill, Maidenhead.
3. Shiah, Y.C. and Tan, C.L. (1998), BEM Treatment of Two-Dimensional Anisotropic Field Problems by Direct Domain Mapping, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 20, pp. 347-351.
4. Zhang, J. J., Tan, C. L., and Afagh, F. F. (1996a), An argument redefinition procedure in the BEM for 2D anisotropic elastostatics with body forces. In: *Proc. Symposium on Mechanics in Design*, Toronto, May 6-9, Meguid, S. A., Ed., Vol. 1, pp. 349-358.
5. Zhang, J. J., Tan, C. L., and Afagh, F. F. (1996b), A general exact transformation of body-force volume integral in BEM for 2d anisotropic elasticity. *Comput Mech.* 19: 1-10.
6. Tan, C.L., Gao, Y.L. and Afagh, F.F., "Boundary Element Analysis of Interface Cracks Between Dissimilar Anisotropic Materials", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 29, pp. 3201-3220 (1992).

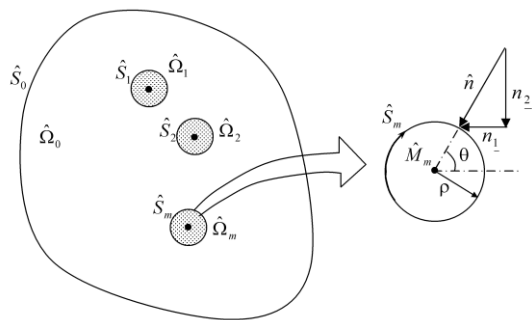


圖.1：分散於映射區內部之集中熱源

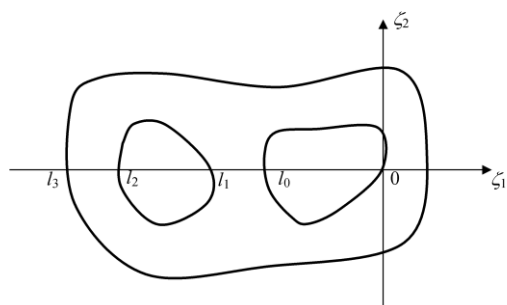


圖.2：多重連接域

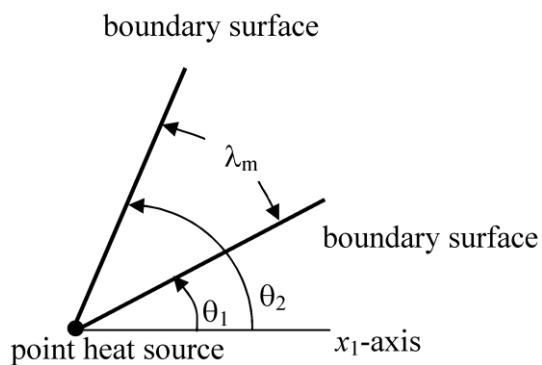


圖.3：角點上之點熱源

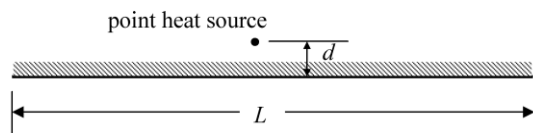


圖.4：點熱源與邊界距離比

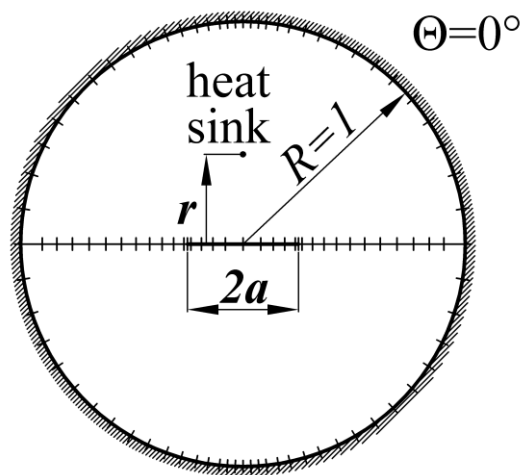


圖.5：BEM 網格模型

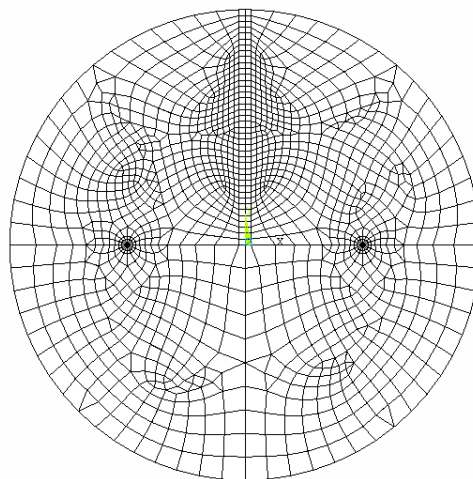


圖.6：FEM 網格模型

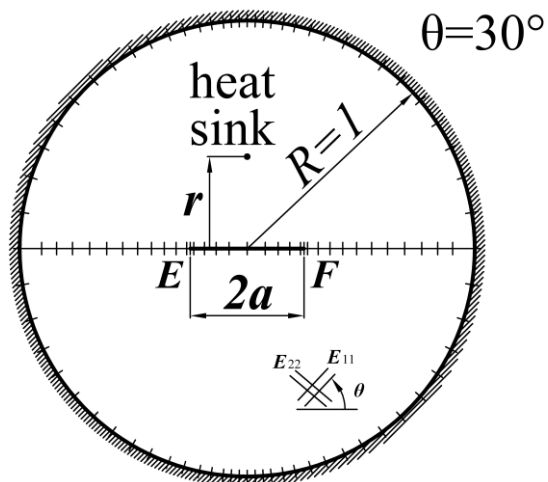


圖.7：BEM 網格模型

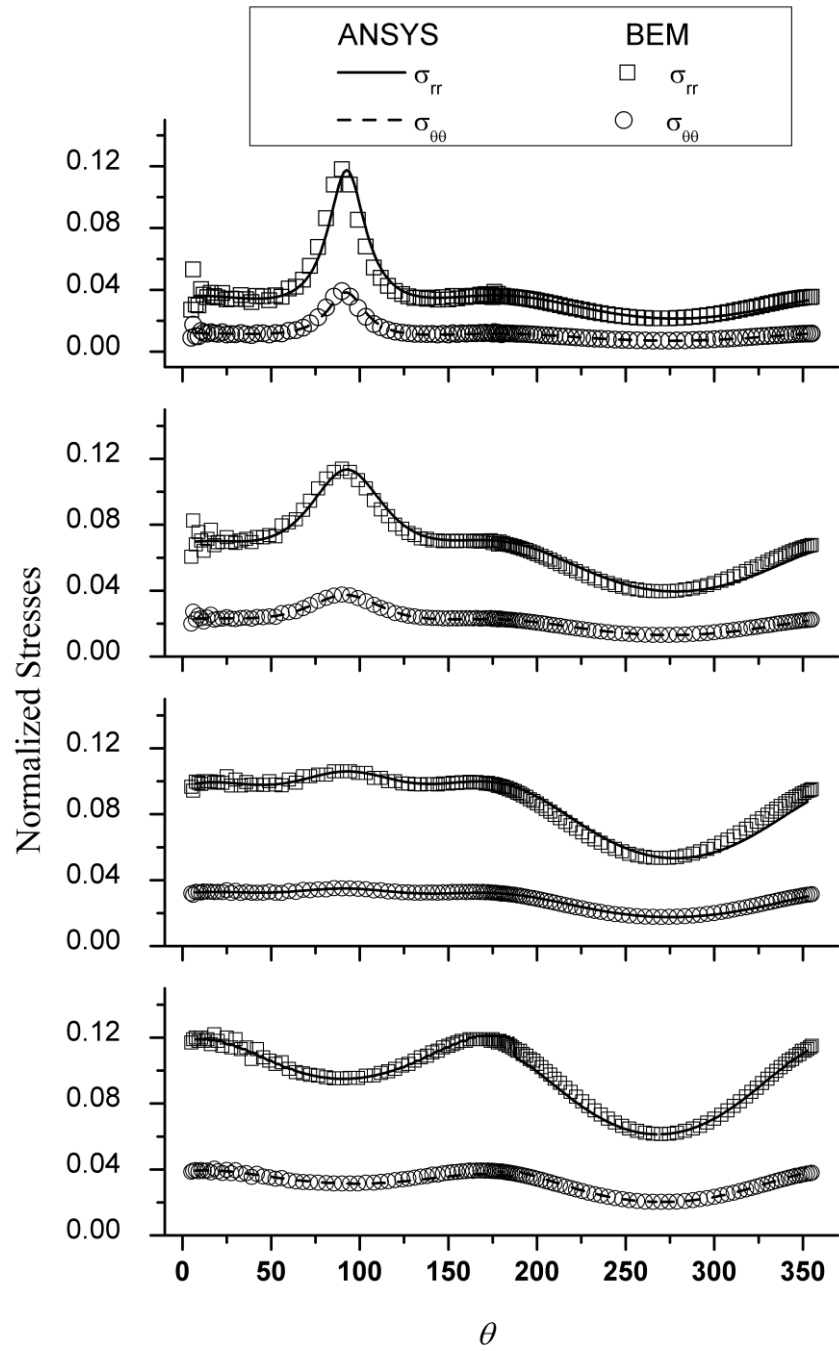


圖.8：a/R=0.5、圓周上 σ_{rr} 及 $\sigma_{\theta\theta}$ 之比較

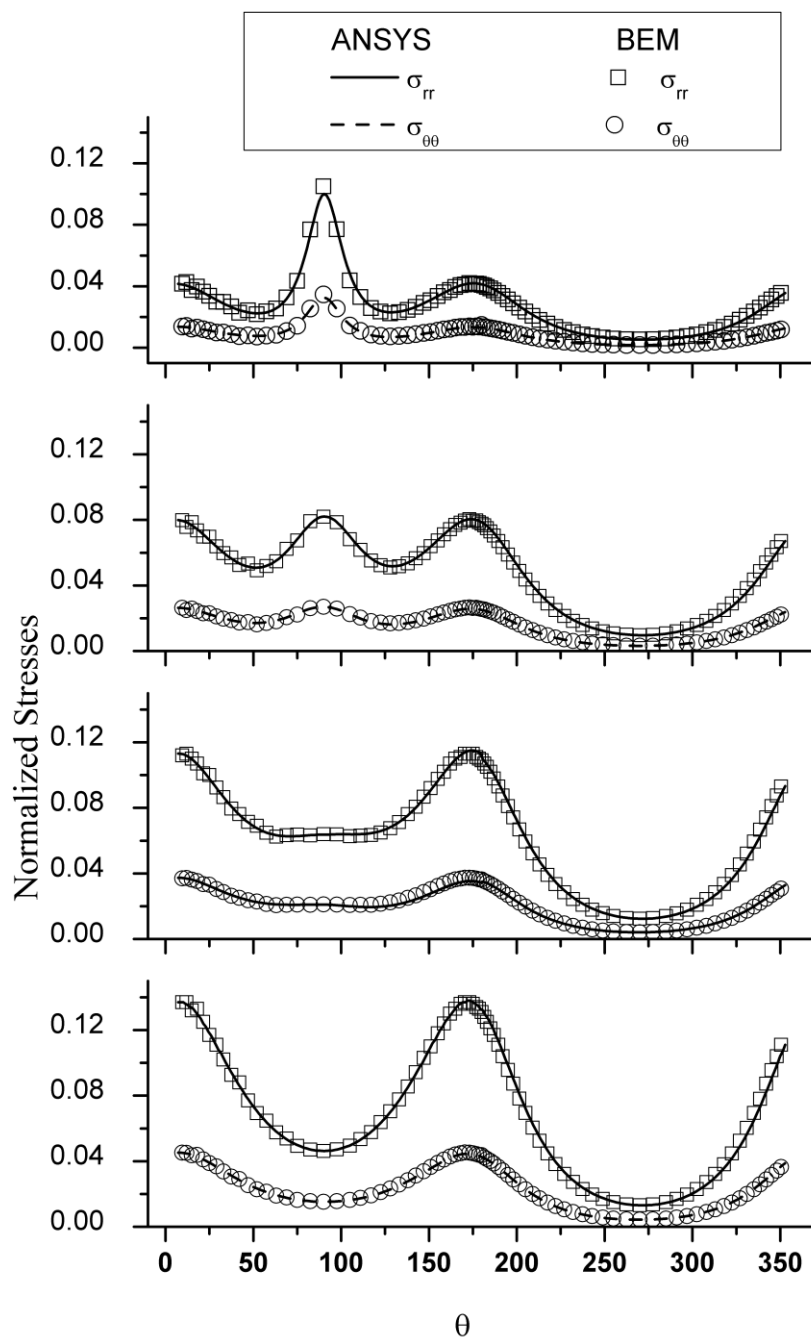


圖.9：a/R=1、圓周上 σ_{rr} 及 $\sigma_{\theta\theta}$ 之比較

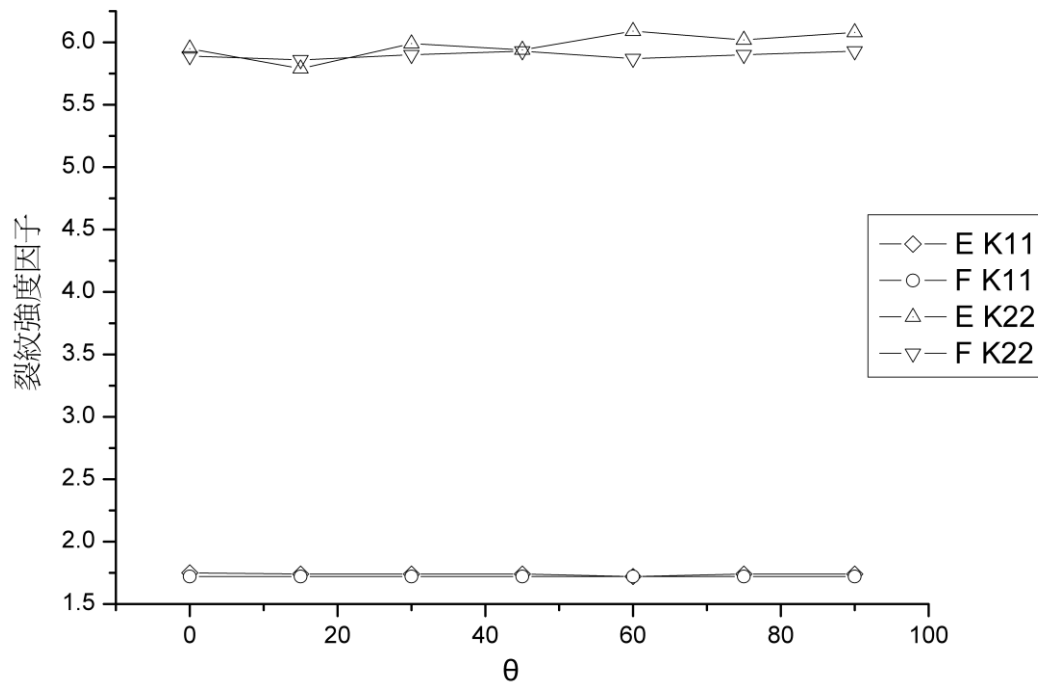


圖.10：a/R=0.5，裂紋強度因子與 θ 關係圖

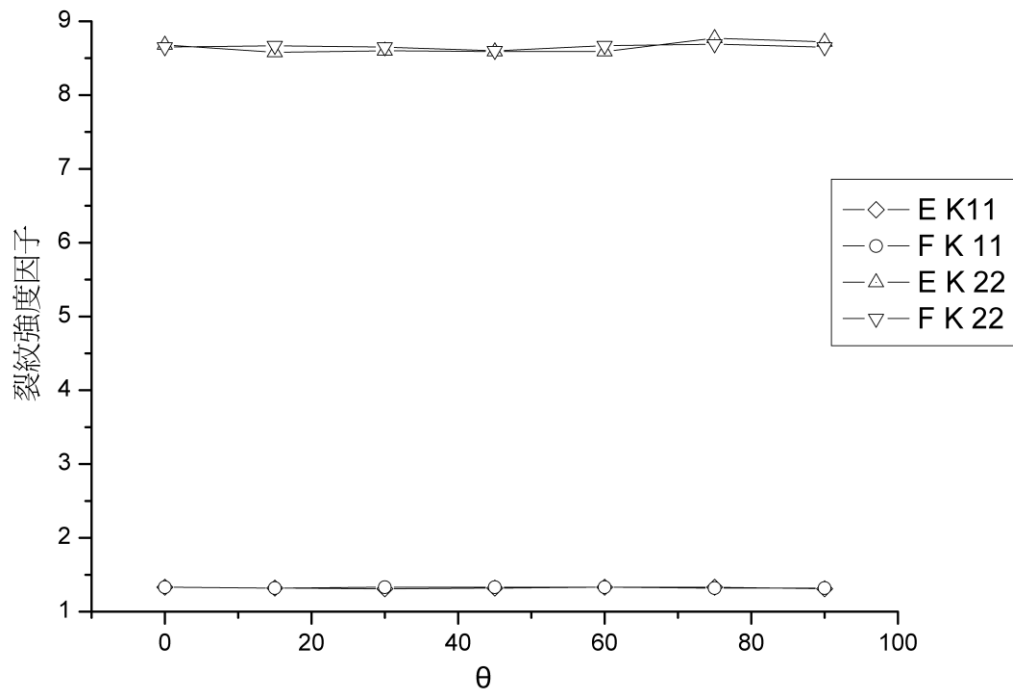


圖.11：a/R=1，裂紋強度因子與 θ 關係圖

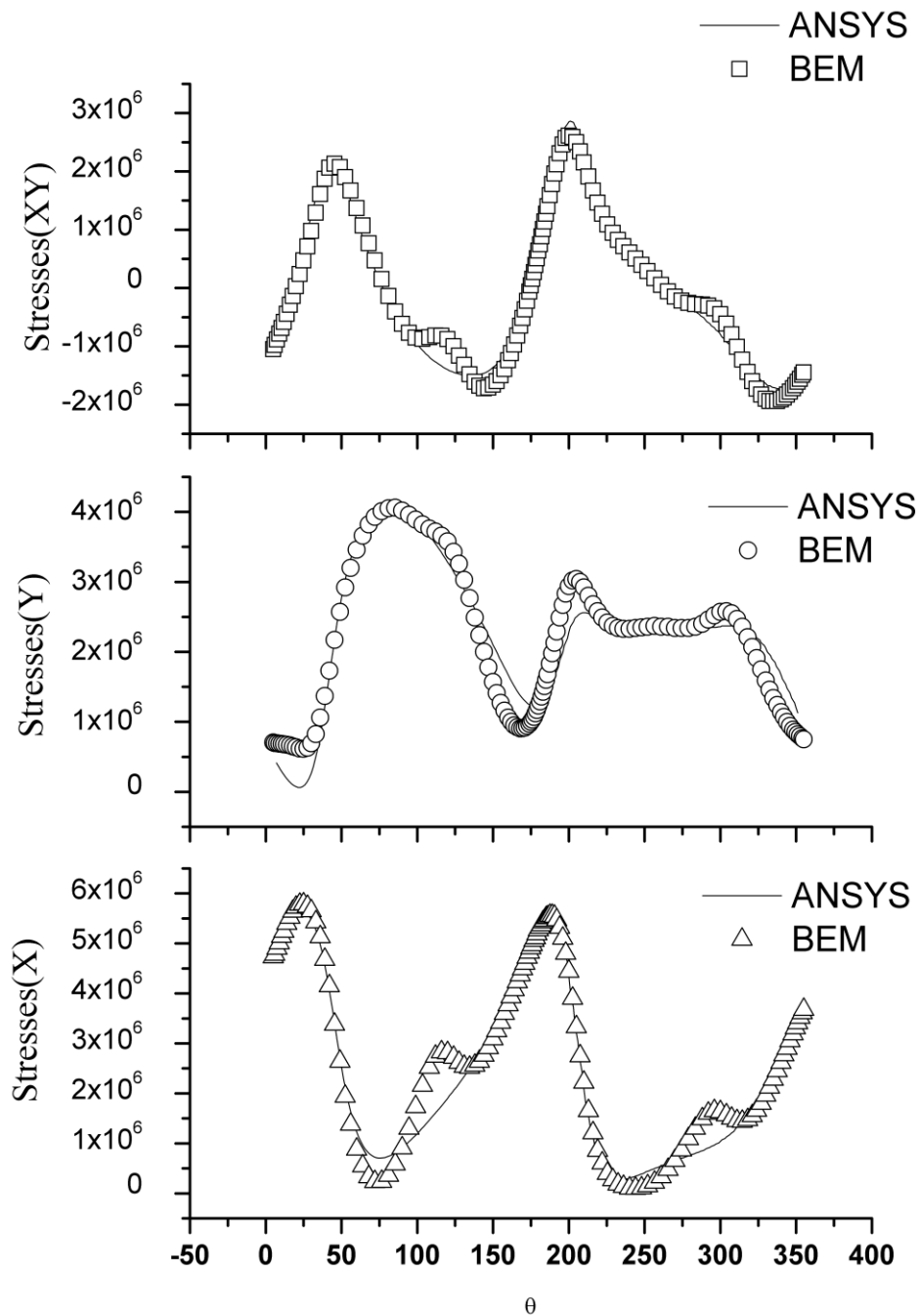


圖.12：a/R=0.5、r/R=0.2、圓周上各應力值之比較

附表.1：BEM 及 FEM 裂紋強度因子對照

a/W	r/R	K_I/K_0			K_{II}/K_0		
		BEM	FEM	% Diff.	BEM	FEM	% Diff.
0.25	0.2	0.1832	0.1918	4.5	0.0619	0.0645	3.9
	0.4	0.1499	0.1572	4.6	0.0384	0.0401	4.3
	0.6	0.1075	0.1129	4.7	0.0232	0.0241	2.0
	0.8	0.0582	0.0612	5.0	0.0116	0.0120	3.5
0.50	0.2	0.1402	0.1475	5.0	0.0909	0.0950	4.3
	0.4	0.1244	0.1311	5.1	0.0699	0.0731	4.3
	0.6	0.0940	0.0989	4.9	0.0471	0.0493	4.2
	0.8	0.0521	0.0544	4.3	0.0243	0.0255	4.7

