# 新建賣場影響居民消費之研究

## A study on populace shopping for a new shop

胡宗義

Tzong-Yih Hwu

## 摘要

本研究係以簡單數學模型來分析新建賣場如何吸引附近居民前往購物，探討之影響因子有 2 賣場相隔距離與佔地面積比率。別於前人研究，賣場所在城市區域為一有限範圍。研究結果指出：為吸引更多居民惠顧，若新建賣場面積較大或與舊者相同時，其座落位置應儘可能靠近舊賣場；反之，則存在臨界位置，當新賣場蓋予其處時，所能影響之範圍最大，且若新賣場面積愈小，與舊賣場之距離應加大。

關鍵詞：賣場消費、臨界位置、數學模型

## ABSTRACT

A simply mathematical model is developed in the present study to deal with the impacts of a new shop upon the populace. The factors include the distances between the two shops and the ratios of the two shop areas. Rather than those considered in literature, the area of city for which people come from and shop is finite. The results point out that, when the new shop spans an area larger than or equal to that of the other, the distances between the shops should be as small as possible for the new shop attracting city people. If the areas of the new shop are smaller than that of the other, critical positions exist for which the new shop has maximal influence regions. Furthermore, the new shop with smaller areas must be constructed farer from the older one.

Keywords：  shopping, critical position, mathematical model

## 一、前言

到賣場購物消費是民眾生活的一部份，賣場若要生意興隆，吸引大批人潮，以下有幾項是必須考慮的因素(羅浩源[2])。第一、賣場佔地面積要夠大，因為一個大型賣場才能陳列琳瑯滿目的商品，提供民眾選購。第二、賣場座落的位置與消費者居住的地點愈近愈佳，如此才能因為交通便利，提高民眾購買欲望。當然除了上述以外，還有其它因素會直接或間接地影響消費者購物傾向，例如店家的評價等，在此不多闡述。過去學者曾經針對 2 個賣場做分析(羅浩源[2])，透過數學模型可以瞭解：若已知 2 賣場之間的距離與 2 佔地面積之比值時，則可界定出 2 賣場各自的影響範圍，有趣的是：影響範圍之中分線是 1 個圓或 1 條直線。但是上述分析結果是假設賣場周遭均住滿民眾，而且綿延至無窮遠處。本研究將以過去前人的努力成果做為基礎，探討當 2 賣場附近的住家範圍是有限的情形下(亦即距離賣場太遠處並無人居住)，賣場面積與興建位置如何影響鄰近居民之消費行為，如此分析所得結果將更為接近真實狀況。藉由計算結果，提供興建賣場投資業者一些初步參考資訊。

## 二、數學分析與討論

### 2.1 前人研究

首先詳盡陳述前人研究(羅浩源[2])。設某賣場每

胡宗義　蘭陽技術學院電腦應用工程系副教授

年或每季民眾進入購物消費之人次數為 $N$，此數應與賣場佔地面積 $A$ 成正比(理由如前文說明)，而與民眾至賣場間距離之平方 $L^2$ 成反比(因距離遠近影響購物次數多寡之有效範圍係以平面面積計算)，故數學式可表成(羅浩源[2])

$$N = k\frac{A}{L^2} \tag{1}$$

式中 $k$ 為常數，代表一般民眾消費行為的指數(指標)。設第 1 個賣場佔地面積 $A_1$，其中心所在位置座標為 $(0,0)$；第 2 個賣場佔地面積 $A_2$，位置座標為 $(p,0)$，則 2 賣場中心之間的距離為 $p$。民眾每年(或每季)至第 1 賣場消費之人次數為

$$N_1 = k\frac{A_1}{L_1^2} \tag{2}$$

同理，民眾每年(或每季)至第 2 賣場消費之人次數為

$$N_2 = k\frac{A_2}{L_2^2} \tag{3}$$

上 2 式中，$L_1$、$L_2$ 為民眾與第 1 賣場及第 2 賣場之間的距離。設民眾居住位置之座標為 $(x,y)$，則有 $L_1^2 = x^2 + y^2$ 與 $L_2^2 = (x-p)^2 + y^2$，式(2)、(3)可寫成

$$N_1 = k\frac{A_1}{x^2 + y^2} \tag{4}$$

$$N_2 = k\frac{A_2}{(x-p)^2 + y^2} \tag{5}$$

然後考慮 2 賣場對附近民眾之吸引範圍為何？亦即居住何處之居民，其至 2 賣場購物之次數(或機率)是相等的。令 $N_1 = N_2$ 可得

$$\left(x - \frac{pA_1}{A_1 - A_2}\right)^2 + y^2 = \left[\frac{\sqrt{A_1A_2}\,p}{A_1 - A_2}\right]^2 \tag{6}$$

上式為 1 個圓，其圓心座標為 $[pA_1/(A_1 - A_2), 0]$，半徑為 $\sqrt{A_1A_2}\,p/(A_1 - A_2)$。若令 2 賣場面積比值為 $A_2/A_1 = S$，則式(6)可改為

$$\left(x - \frac{p}{1-S}\right)^2 + y^2 = \left[\frac{\sqrt{S}\,p}{1-S}\right]^2 \tag{7}$$

其圓心座標為 $[p/(1-S), 0]$，半徑為 $\sqrt{S}\,p/(1-S)$(羅浩源[2])。若定義新變數：$x^* = x/p$、$y^* = y/p$，則式(7)可改為

$$\left(x^* - \frac{1}{1-S}\right)^2 + y^{*2} = \left[\frac{\sqrt{S}}{1-S}\right]^2 \tag{8}$$

特別值得注意的是：當 2 賣場具有相等大小之面積($S = 1$)，上述之圓會變成 1 條垂直線：$x = p/2$ 或 $x^* = 1/2$。圖 1 說明 2 賣場在不同面積比值情形下所產生之吸引範圍。由結果可知：當第 2 賣場面積較小時($S < 1$)。2 賣場吸引範圍之「中分界線」是位於垂直線($x^* = 1/2$)右側之圓，圓內部面積即為第 2 賣場吸引附近民眾前往購物之範圍，圓以外的面積即為第 1 賣場吸引附近民眾前往購物之範圍。此外；若增加第 2 賣場面積，將可增大其對民眾吸引之面積，唯必須增加興建成本。如前述，當 2 賣場面積相等時($S = 1$)，因為 2 賣場之條件相當，其吸引範圍之「中分界線」是一條位於 $x^* = 1/2$ 之垂直線。當第 2 賣場面積較大時($S > 1$)。2 賣場吸引範圍之「中分界線」是位於垂直線($x^* = 1/2$)左側之圓，圓以外之面積即為第 2 賣場吸引附近民眾前往購物之範圍，圓內部面積即為第 1 賣場吸引附近民眾前往購物之範圍。同理，增加第 2 賣場面積，將可縮減第 1 賣場對民眾吸引之面積。

### 2.2 本研究工作

接下來是本研究之核心工作。鑒於上述模式雖然理想，也能反應一部份事實，但是必竟有其缺陷，其中之一，就是未能考慮賣場附近民眾居住之散佈情況，因為距離賣場太遠之處可能無人居住。或者換個角度來看，當已知某城市住家之分佈範圍，且市區中心已興建第 1 座賣場，若某業者擬再興建第 2 座賣場，則如何評估新建賣場之影響(吸引)範圍？以下針對本問題建立數學模型並分析。

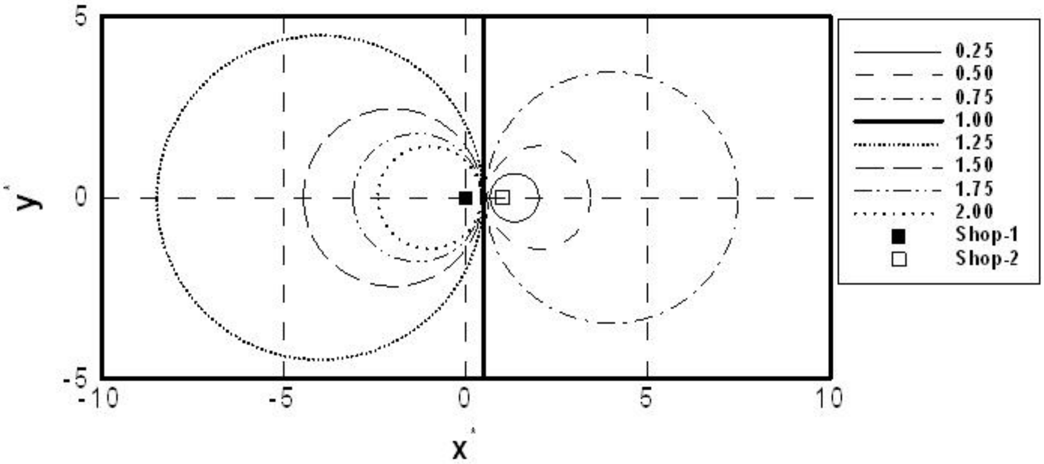



圖 1　2 賣場在不同面積比值情形下所產生之吸引範圍

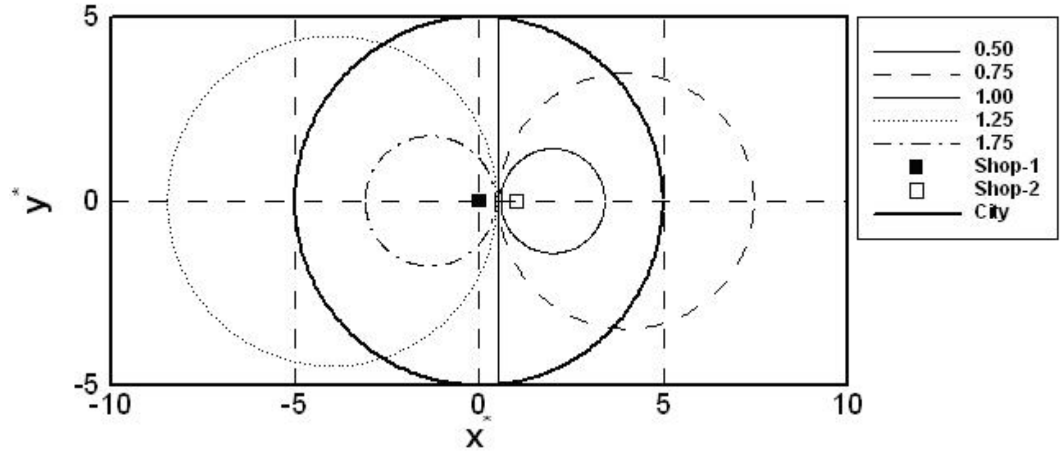



圖 2　2 賣場吸引範圍中分界線與城市區域之相對位置

設城市中心座標為 (0,0) ，此亦為第 1 賣場中心位置所在，城市居民平均分散在半徑為 $R$ 之圓內。若第 2 賣場興建之位置在 $(p,0)$ ，則依據前述結果，當 2 賣場面積不同時，其影響範圍之「中分圓」可能全部落在城市區域內(半徑為 $R$ 之圓)，或者一部份落在城市區域內，另一部份落在城市區域外，最後一種情形是「中分圓」全部落在城市區域外，因為此種情況對投資者而言，並無商業利益，故不予討論。當 2 賣場面積相同時，其影響範圍之「中分線」可能將城市切割成大小不等之二區塊，或者全部落在城市區域以外。圖 2 顯示上述多種不同情況(不包括中分界線落於城市區域以外的情形)。

以下分析各種可能情形之結果

**2.2.1 2 賣場面積相同($S=1$)**

在此情形下，且又符合條件： $p/2<R$，則中分線位在 $x=p/2$ 處，中分線與城市邊界圓有 2 交點，座標為 $\left(p/2,\pm\sqrt{R^2-p^2/4}\right)$，由此可計算出，當興建第 2 賣場後，可吸引附近民眾前往購物之影響面積為

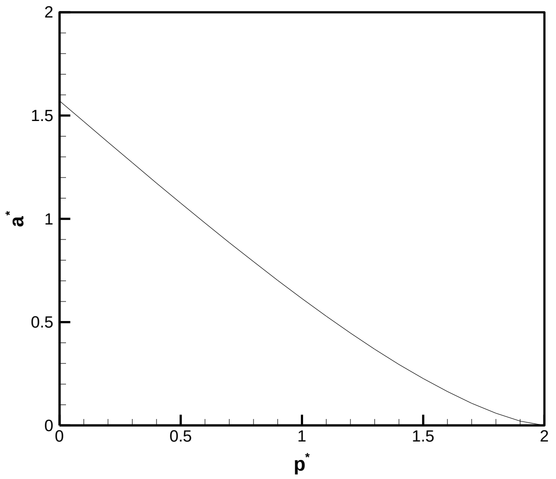



圖 3　具相同面積之 2 賣場，其間距離與第 2 賣場吸引範圍面積之變化趨勢

$$a = R^2 \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{4R^2}{p^2}-1}\right) - \frac{p}{4}\sqrt{4R^2-p^2} \qquad (9)$$

將上式除以 $R^2$ 可得無因次影響面積如下

$$a^* = \tan^{-1}\left(p^{*-1}\sqrt{4-p^{*2}}\right) - \frac{p^*}{4}\sqrt{4-p^{*2}} \qquad (10)$$

式中 $a^* = a/R^2$ 、 $p^* = p/R$ ，適用範圍為 $p^* < 2$ (可由條件式：$p/2 < R$ 推得)。圖 3 為式(10)之函數曲線，結果顯示，當第 2 賣場之位置愈靠近第 1 賣場，將吸引更多人潮。一種極端情形指出：當 2 賣場緊鄰隔壁，則因 $p^* \to 0$ ，故得 $a^* \to \pi/2$ （$a \to \pi R^2/2$），亦即第 2 賣場吸引範圍遍及右側半個城市。

**2.2.2 2 賣場面積不同，且第 2 賣場面積較小( $S < 1$ )**

**1.　「中分圓」全部落在城市區域內**

發生此種情況之條件為

$$\frac{p}{1-S} + \frac{\sqrt{S}\,p}{1-S} = \frac{p}{1-\sqrt{S}} \le R \qquad (11)$$

將上式除以 $R$ 可得

$$p^* \le 1-\sqrt{S} \qquad (12)$$

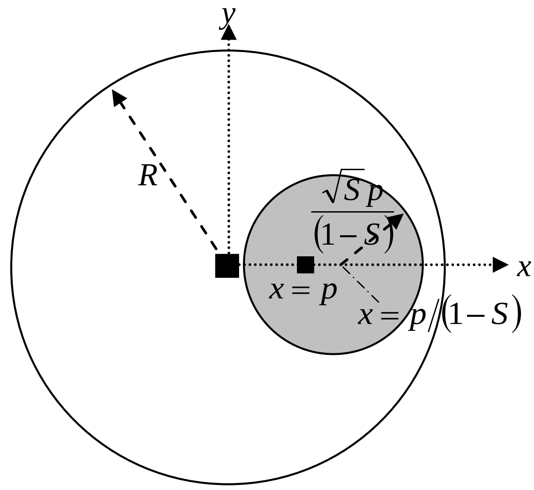



圖 4　第 2 賣場具有較小面積且其吸引範圍全部落在城市區域內情形下，陰影區域代表第 2 賣場之影響範圍

在此狀況下，興建第 2 賣場之影響面積恰為涵蓋第 2 賣場之「中分圓」所包圍之圓形面積(圖 4)

$$a = \frac{\pi S p^2}{(1-S)^2} \qquad (13)$$

將上式除以 $R^2$ 可得

$$a^* = \frac{\pi S p^{*2}}{(1-S)^2} \qquad (14)$$

上式圖形示於圖 5，由於有式(12)之限制，$S$ 值愈大，$p^*$ 之上限值愈小。另得知，當 2 賣場面積比值為固定，若增加 2 賣場之間的距離，將可增大第 2 賣場之吸引範圍。此乃由於受到來自第 1 賣場「牽制」效應減弱之故。將式(12)代入式(14)可得

$$a^* \le \frac{\pi S}{\left(1+\sqrt{S}\right)^2} \text{ ，} 0 < S < 1 \qquad (15)$$

圖 6 代表此不等式之最大值，結果顯示：第 2 賣場面積愈大(2 賣場之距離可以調動)，則吸引民眾前來消費之最大影響範圍愈大。另由式(12)與式(15)可知：當設定 2 賣場面積比值後，如欲使第 2

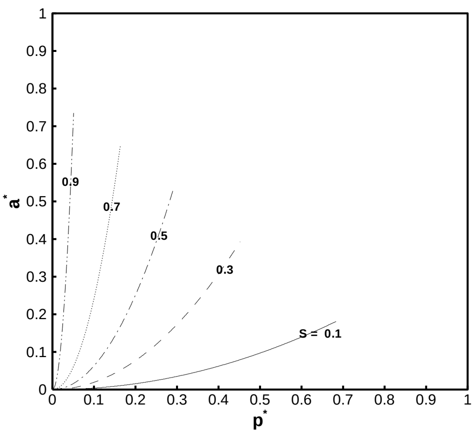



圖 5　第 2 賣場具有較小面積且其吸引範圍全部落在城市區域內情形下，第 2 賣場影響面積之變化趨勢

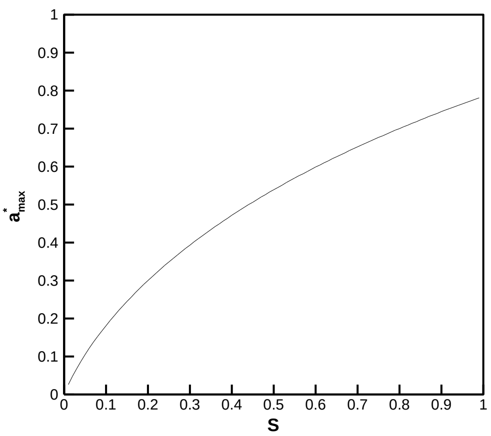



圖 6　第 2 賣場具有較小面積且其吸引範圍全部落在城市區域內情形下，2 賣場面積比值與第 2 賣場最大影響範圍面積之變化趨勢

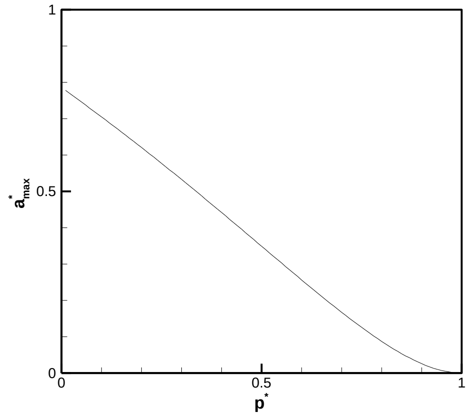



圖 7　第 2 賣場具有較小面積且其吸引範圍全部落在城市區域內情形下，2 賣場距離與第 2 賣場最大影響範圍面積之變化趨勢

賣場影響範圍達到最大，則必須將第 2 賣場蓋在 $p^* = 1 - \sqrt{S}$ 處(或是 $p = \left(1 - \sqrt{S}\right)R$ )，且最大影響範圍之面積為 $a^* = \pi S / \left(1 + \sqrt{S}\right)^2$ ( 或是 $a = \pi S R^2 / \left(1 + \sqrt{S}\right)^2$ )。以 $S = 0.5$ 為例，若將第 2 賣場蓋在 $0 < p^* \le 1 - \sqrt{0.5} = 0.29$，則其影響範圍將全部落在城市區域內。且當 $p^* = 1 - \sqrt{0.5}$ 時，第 2 賣場之影響範圍最大，其面積(無因次)等於 $a^* = \pi \times 0.5 / \left(1 + \sqrt{0.5}\right)^2 = 0.54$ 。若蓋在 $p^* = \left(1 - \sqrt{0.5}\right)/2$，則其影響面積為 0.135 (由式(14)計算)，大約為最大值之 25%。

若將式(12)改寫成

$$S \le \left(1 - p^*\right)^2 \tag{16}$$

與

$$\left(1 - S\right)^{-2} \le 1 / \left[p^{*2}\left(2 - p^*\right)^2\right] \tag{17}$$

再代入式(14)可得

$$a^* \le \pi \left(\frac{1 - p^*}{2 - p^*}\right)^2 ,\ 0 < p^* < 1 \tag{18}$$

圖 7 代表此不等式之最大值，結果顯示：若 2 賣場地點愈靠近(2 賣場面積之比值可以調動)，則民眾至第 2 賣場購物之最大影響範圍愈大。另由式(16)與式(18)可知：當決定第 2 賣場之位置後，如欲使第 2 賣場影響範圍達到最大，則 2 賣場面積之比值應為 $\left(1 - p^*\right)^2$ ，且最大影響範圍之面積為 $\pi \left[\left(1 - p^*\right)/\left(2 - p^*\right)\right]^2$ ( 或是 $\pi R^2 \left[\left(1 - p^*\right)/\left(2 - p^*\right)\right]^2$ )。以 $p^* = 0.5$ 為例，若 2 賣場面積之比值符合條件： $S \le 1/4$ ，則第 2 賣場之影響範圍將全部落在城市區域內。且當 $S = 1/4$ 時，第 2 賣場之影響範圍最大，其面積(無因次)等於 $a^* = \pi/9 = 0.35$ 。若改為 $S = 1/8$ ，則其影響

面積為 0.128 (由式(14)計算)，約為最大值之 36.6%。

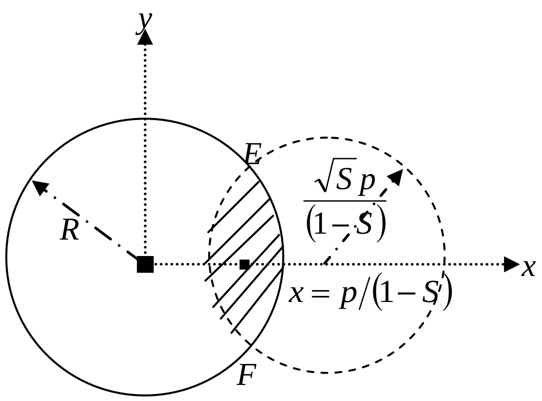



圖 8　第 2 賣場面積較小且「中分圓」一部份落在城市區域內，一部份落在城市區域外情形下，陰影區域代表第 2 賣場之影響範圍

**2.「中分圓」一部份落在城市區域內，一部份落在城市區域外**

發生此種情況之條件為

$$R < \frac{p}{1-S} + \frac{\sqrt{S}\,p}{1-S} = \frac{p}{1-\sqrt{S}} \tag{19}$$

與

$$\frac{p}{1-S} - \frac{\sqrt{S}\,p}{1-S} = \frac{p}{1+\sqrt{S}} < R \tag{20}$$

合併 2 式可得

$$R < \frac{p}{1-\sqrt{S}} < R + \frac{2\sqrt{S}\,p}{1-S} \tag{21}$$

將上式除以 $R$ 可得

$$1 < \frac{p^*}{1-\sqrt{S}} < 1 + \frac{2\sqrt{S}\,p^*}{1-S} \tag{22}$$

或改寫成

$$1-\sqrt{S} < p^* < 1+\sqrt{S} \tag{23}$$

在此情況下，興建第 2 賣場所造成之影響面積等於「中分圓」內部區域與城市區域交集所得之面積(圖 8)。式(23)中，當 $1 < p^* < 1+\sqrt{S}$ 表示第 2 賣場蓋在城市區域以外。利用代表城市邊界之圓方程式：$x^2 + y^2 = R^2$ 與代表第 2 賣場影響範圍之圓方程式：$[x - p/(1-S)]^2 + y^2 = Sp^2/(1-S)^2$ 可得出 2 交點 $(E, F)$ 座標為

$$E_x = F_x = \frac{(1-S)R^2 + p^2}{2p} \tag{24}$$

$$E_y, F_y = \pm\sqrt{R^2 - \left[\frac{(1-S)R^2 + p^2}{2p}\right]^2} \tag{25}$$

則興建第 2 賣場所造成之影響面積可計算得(查閱積分表，郭滄海等[1])

$$a = \frac{1}{2p}\left[\frac{1-S}{2p}R^2 - \frac{p(1+S)}{2(1-S)}\right] \times$$

$$\sqrt{4p^2R^2 - \left[(1-S)R^2 + p^2\right]^2} +$$

$$\frac{Sp^2}{(1-S)^2}\sin^{-1}\left\{\frac{(1-S)^2R^2}{2\sqrt{S}\,p^2} - \frac{1+S}{2\sqrt{S}}\right\} +$$

$$\frac{Sp^2\pi}{2(1-S)^2} + \frac{\pi R^2}{2} -$$

$$\frac{(1-S)R^2 + p^2}{2p}\sqrt{R^2 - \left[\frac{(1-S)R^2 + p^2}{2p}\right]^2} -$$

$$R^2\sin^{-1}\left[\frac{(1-S)R^2 + p^2}{2pR}\right] \tag{26}$$

將上式除以 $R^2$ 可得

$$a^* = \left[\frac{1-S}{4p^{*2}} - \frac{(1+S)}{4(1-S)}\right] \times$$

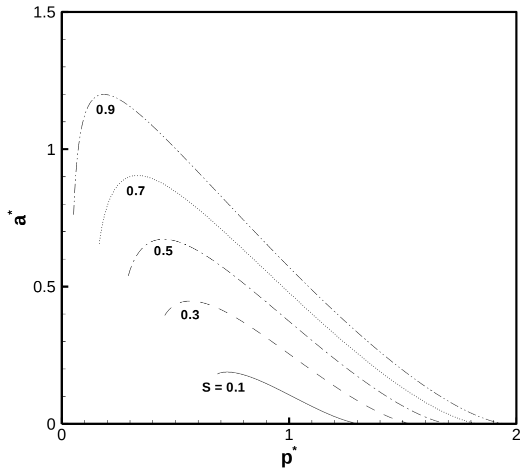



圖 9　第 2 賣場面積較小且「中分圓」一部份落在城市區域內，一部份落在城市區域外情形下，第 2 賣場影響面積之變化趨勢

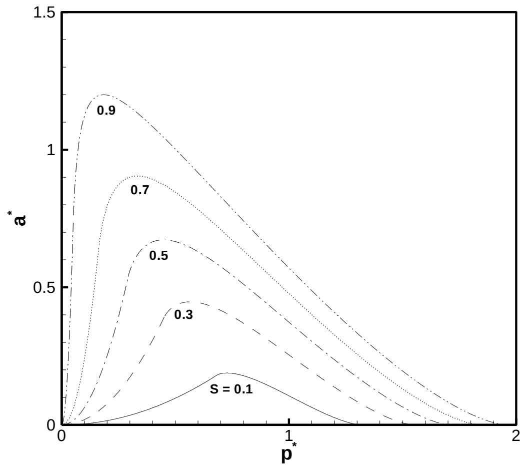



圖 10　第 2 賣場面積較小情形下，其吸引範圍面積之變化趨勢

$$\sqrt{4p^{*2}-\left[(1-S)+p^{*2}\right]^2}+$$

$$\frac{Sp^{*2}}{(1-S)^2}\sin^{-1}\left\{\frac{(1-S)^2}{2\sqrt{S}\,p^{*2}}-\frac{1+S}{2\sqrt{S}}\right\}+$$

$$\frac{Sp^{*2}\pi}{2(1-S)^2}+\frac{\pi}{2}-$$

$$\frac{(1-S)+p^{*2}}{2p^*}\sqrt{1-\left[\frac{(1-S)+p^{*2}}{2p^*}\right]^2}-$$

$$\sin^{-1}\left[\frac{(1-S)+p^{*2}}{2p^*}\right] \qquad (27)$$

上式精確描述興建第 2 賣場所形成之影響面積受到座落位置與 2 賣場面積比值之影響，因為函數關係極為複雜，研究中採用程式計算並繪製結果於圖 9。結果顯示：當 2 賣場面積之比值為固定時，第 2 賣場有其臨界位置(或 2 賣場間之臨界距離)，使得其影響範圍達到最大(圖形之最高峰)。臨界距離隨著 2 賣場面積比值增加而減少，亦即當第 2 賣場面積愈小時，為使其能影響最多民眾前往消費，則應遠離第 1 賣場興建。

圖 10 係合併圖 5 與圖 9 代表所有 $S<1$ 之結果。由圖形可知：(1)當 2 賣場間之距離為固定，若第 2 賣場面積愈大，則其吸引範圍愈大。(2)當 2 賣場面積比值為固定，則第 2 賣場有最大吸引範圍係發生在「中分圓」一部份落在城市區域內，另一部份落在城市區域外情形下。此外，無論「中分圓」是全部落在城市區域內，亦或另一種情形，將各有一個位置，使第 2 賣場具有相同之吸引範圍。以 $S=0.5$ 為例，第 2 賣場之最大吸引範圍面積約等於 $a^*=0.672$ ，又當 2 賣場之間距離為 $p^*=0.219$ (「中分圓」全部落在城市區域內)與 1.106 (「中分圓」一部份落在城市區域內，另一部份落在城市區域外)時，第 2 賣場影響範圍面積皆為 0.3 。圖 10 顯示另一項有趣但為必然之事實：對於任一 $S$ 值而言，曲線為連續不間斷，此可推証如下。由式(23)與式(27)知，當 $p^*\to 1-\sqrt{S}$ 時，$a^*\to \pi S/\left(1+\sqrt{S}\right)^2$ ；另由式(12)與式(14)知，當 $p^*\to 1-\sqrt{S}$ 時，$a^*\to \pi S/\left(1+\sqrt{S}\right)^2$ 。

### 2.2.1 2 賣場面積不同，且第 2 賣場面積較大 ($S>1$)

**1. 「中分圓」全部落在城市區域內**

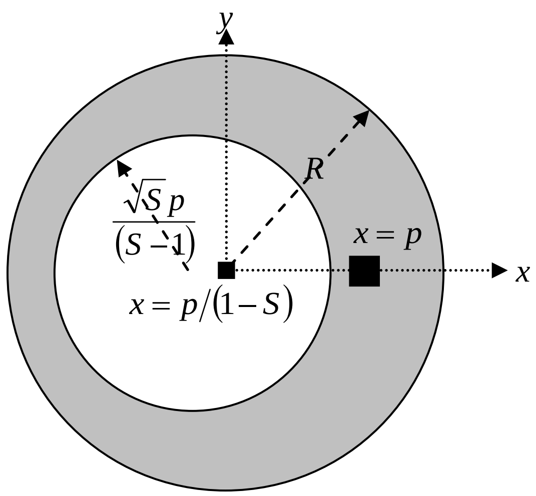



圖 11　第 2 賣場面積較大且「中分圓」全部落在城市區域內情形下，陰影區域代表第 2 賣場所能影響之範圍

發生此種情況之條件為

$$-R \le \frac{p}{1-S} + \frac{\sqrt{S}p}{1-S} = \frac{p}{1-\sqrt{S}} < 0 \tag{28}$$

將上式除以 $R$ 可得

$$0 < p^* \le \sqrt{S} - 1 \tag{29}$$

在此狀況下，興建第 2 賣場所能構成之影響面積等於城市區域扣除涵蓋第 1 賣場「中分圓」區域之面積(圖 11)，其值為

$$a = \pi\left[R^2 - \frac{Sp^2}{(1-S)^2}\right] \tag{30}$$

上式除以 $R^2$ 得

$$a^* = \pi\left[1 - \frac{Sp^{*2}}{(1-S)^2}\right] \tag{31}$$

上式函數示於圖 12。由於有式(29)之限制， $p^*$ 值有其上限，且上限值隨著 $S$ 值而增加。圖形顯示，當 2 賣場面積比值為固定，若 2 賣場之間距離愈遠，將縮減第 2 賣場之影響範圍。當 $p^* \to 0$ ，亦即 2 賣場緊鄰隔壁，由式(31)可得 $a^* \to \pi$ ，在此情形下，由於第 2 賣場之面積較大，完全「抑制」第 1 賣場之吸引力，其影響範圍遍及整個城市。將式(29)代入式(31)可得

$$\pi > a^* \ge \frac{1+2\sqrt{S}}{1+2\sqrt{S}+S}\pi \tag{32}$$

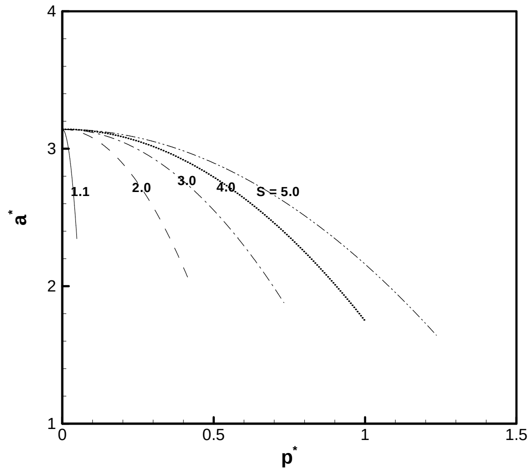



圖 12　第 2 賣場面積較大且「中分圓」全部落在城市區域內情形下，第 2 賣場影響面積之變化趨勢

上式為第 2 賣場所能影響之最小面積，且發生在 $p^* = \sqrt{S} - 1$(圖 13)。

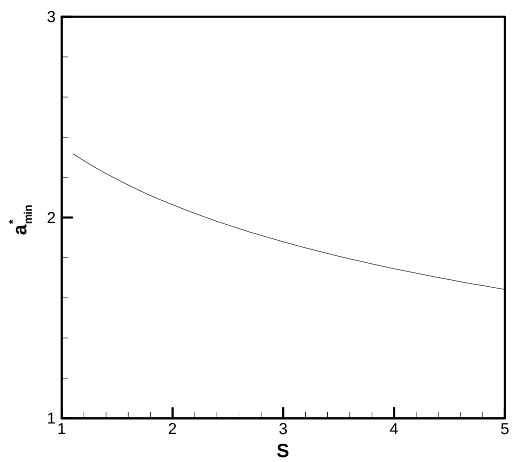



圖 13　第 2 賣場面積較大且「中分圓」全部落在城市區域內情形下，2 賣場面積比值與第 2 賣場最小影響面積之變化趨勢

**2. 「中分圓」之一部份落在城市區域內，一部份落在城市區域外**

發生此種情況之條件為

$$\frac{p}{1-S}+\frac{\sqrt{S}\,p}{1-S}=\frac{p}{1-\sqrt{S}}<-R \qquad (33)$$

與

$$\frac{p}{1-S}-\frac{\sqrt{S}\,p}{1-S}=\frac{p}{1+\sqrt{S}}<R \qquad (34)$$

將 2 式合併後除以 $R$ 可得

$$\sqrt{S}-1<p^*<\sqrt{S}+1 \qquad (35)$$

在此狀況下，興建第 2 賣場所造成之影響面積等於城市區域面積扣除涵蓋第 1 賣場「中分圓」與城市交集面積之面積(圖 14)。如前述，「中分圓」與城市邊緣之 2 交點座標為式(24)與式(25)，興建第 2 賣場所造成之影響面積可由下式推算(查閱積分表，郭滄海等[1])

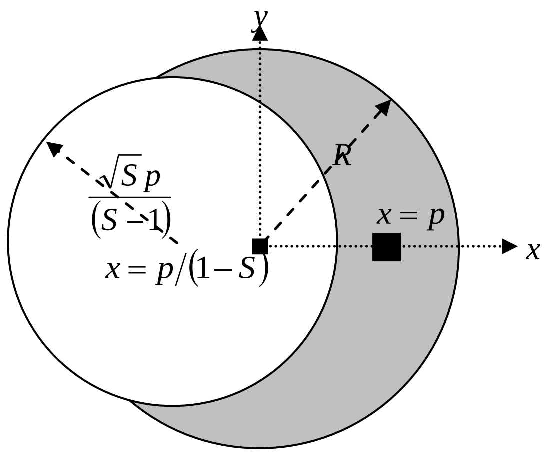



圖 14　第 2 賣場面積較大，且「中分圓」一部份落在城市區域內，一部份落在城市區域外情況下，陰影區域代表第 2 賣場之影響範圍

$$a=\frac{\pi R^2}{2}-\frac{(1-S)R^2+p^2}{2p}\times$$

$$\sqrt{R^2-\left[\frac{(1-S)R^2+p^2}{2p}\right]^2}-$$

$$R^2\sin^{-1}\left[\frac{(1-S)R^2+p^2}{2pR}\right]$$

$$+\frac{1}{2p}\left[\frac{1-S}{2p}R^2-\frac{p(1+S)}{2(1-S)}\right]\times$$

$$\sqrt{4p^2R^2-\left[(1-S)R^2+p^2\right]^2}-$$

$$\frac{Sp^2}{(S-1)^2}\sin^{-1}\left\{\frac{(1-S)^2R^2}{2\sqrt{S}\,p^2}-\frac{1+S}{2\sqrt{S}}\right\}-\frac{Sp^2\pi}{2(S-1)^2} \qquad (36)$$

將上式除以 $R^2$ 可得

$$a^*=\frac{\pi}{2}-\frac{(1-S)+p^{*2}}{2p^*}\times\sqrt{1-\left[\frac{(1-S)+p^{*2}}{2p^*}\right]^2}$$

$$-\sin^{-1}\left[\frac{(1-S)+p^{*2}}{2p^*}\right]+\frac{1}{2p^*}\left[\frac{1-S}{2p^*}-\frac{p^*(1+S)}{2(1-S)}\right]\times$$

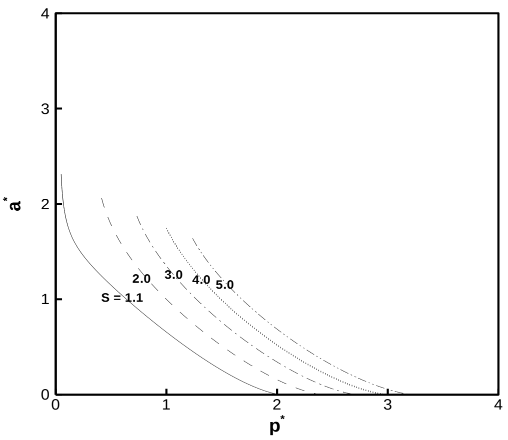
$$\sqrt{4p^{*2}-\left[(1-S)+p^{*2}\right]^2}-$$

$$\frac{Sp^{*2}}{(S-1)^2}\sin^{-1}\left\{\frac{(1-S)^2}{2\sqrt{S}\,p^{*2}}-\frac{1+S}{2\sqrt{S}}\right\}-\frac{Sp^{*2}\pi}{2(S-1)^2} \qquad (37)$$

圖 15 為影響面積曲線，結果顯示：隨著 2 賣場距離之增加，第 2 賣場所能影響之範圍亦趨減小。圖 16 係合併圖 12 與圖 15，代表所有 $S>1$ 之情況，由曲線走向可以清楚瞭解，為了吸引更多民眾，2 賣場間之距離愈近愈佳，若使部份「中分圓」落在城市區域外，則第 2 賣場之影響面積將小於「中分圓」全部落在城市區域內者。最後綜合上述 $S<1$ 、 $S=1$ 與 $S>1$ 三種情形，繪製得圖 17。結果指出：若賣場業者具有優沃資本，則應興建一座比原有賣場面積更大之賣場，以吸引較多民眾前往購物，然而對於欲獲取相同商業利益(具相同吸引範圍面積)而言，新建賣場並非愈大愈佳，還需考量經濟成本因素。以影響面積 $a^*=0.5$ 為例，2 賣場面積比值必須超過 0.35 左右，亦即新建賣場面積不得小於舊有賣場之 35%。在考量投資報酬情況下，$S=0.35$ 為業者之最佳選擇，同時 2 賣場之間距離約為 0.54。

**3. 「中分圓」全部落在城市區域以外**

發生此種情況之條件為：




15　第 2 賣場面積較大且「中分圓」一部份落在城市區域內，一部份落在城市區域外情況下，第 2 賣場影響面積之變化趨勢

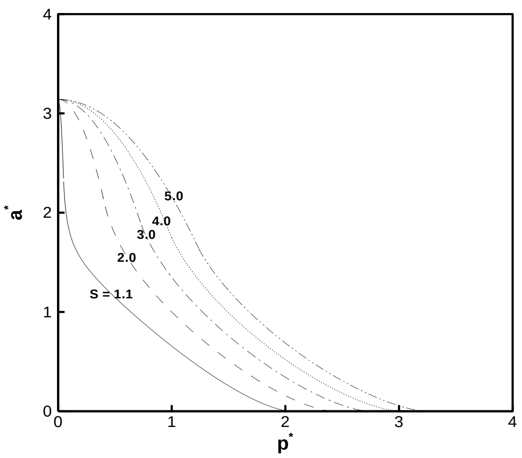



圖 16　第 2 賣場面積較大情形下，其吸引範圍面積之變化趨勢

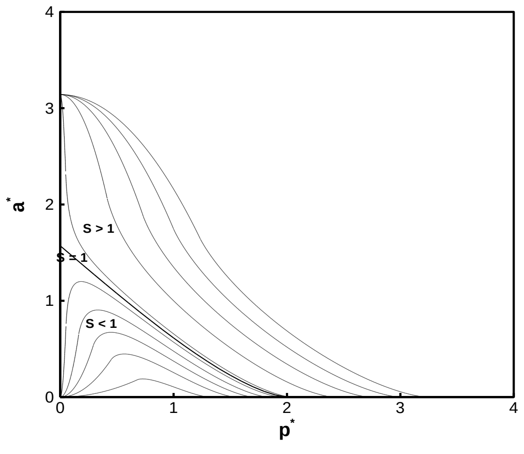



圖 17　第 2 賣場影響範圍面積之變化趨勢

**3. 「中分圓」全部落在城市區域以外**

發生此種情況之條件為：

$$\frac{p}{1-S}+\frac{\sqrt{S}\,p}{1-S}=\frac{p}{1-\sqrt{S}}<-R \tag{38}$$

與

$$R<\frac{p}{1-S}-\frac{\sqrt{S}\,p}{1-S}=\frac{p}{1+\sqrt{S}} \tag{39}$$

將 2 式合併後除以 $R$ 可得

$$1+\sqrt{S}<p^{*} \tag{40}$$

在此情形下，雖然第 2 賣場面積較大，然因其座落位置較遠，整個城市民眾均傾向至第 1 賣場消費，而第 2 賣場影響範圍之面積等於零，在此情形下，對於投資業者並無商業利益可言。

## 三、模式推展與應用

本研究之數學模型(羅浩源[2])係建立在：購物人次與賣場面積成正比且與居民至賣場距離之平方成反比。如若將此數學模型修改成如下型式，則可保有較大彈性(亦可視為模型參數的敏感度分析)

$$N=k\,\frac{A^{\beta}}{L^{\alpha}} \tag{41}$$

原模式乃為選取 $\alpha=2,$ 、$\beta=1$ 之特例。2 賣場吸引範圍之中分界線仍為 1 個圓，其方程式為

$$\left(x-\frac{pA_1^{2\gamma}}{A_1^{2\gamma}-A_2^{2\gamma}}\right)^2+y^2=\left(\frac{pA_1^{\gamma}A_2^{\gamma}}{A_1^{2\gamma}-A_2^{2\gamma}}\right)^2 \tag{42}$$

式中 $\gamma=\beta/\alpha$ ，其相應之無因次方程式為

$$\left(x^{*}-\frac{1}{1-S^{2\gamma}}\right)^2+y^{*2}=\left(\frac{S^{\gamma}}{1-S^{2\gamma}}\right)^2 \tag{43}$$

以第 2 賣場面積較小($S<1$)，且「中分圓」全部落在城市區域內為例，則第 2 賣場所能影響之面積(無因次)為

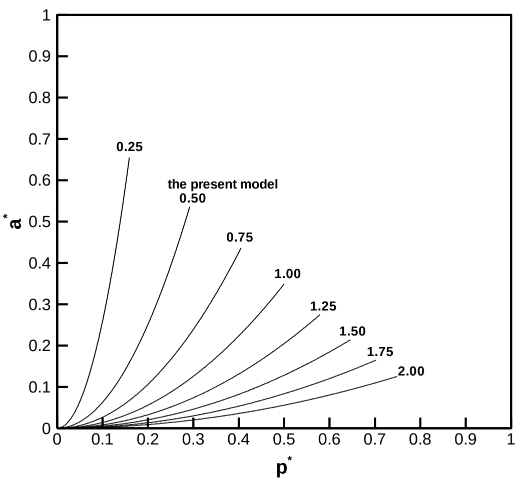



圖 18 第 2 賣場具有較小面積( $S=0.5$ )且其吸引範圍全部落在城市區域內情形下，不同參數值 $\gamma$ 對賣場影響面積之變化趨勢

$$a^{*}=\pi p^{*2}\left(\frac{S^{\gamma}}{1-S^{2\gamma}}\right)^{2} \tag{44}$$

其適用範圍為

$$p^{*}\leq\frac{1-S^{2\gamma}}{1+S^{\gamma}} \tag{45}$$

當 $\gamma=1/2$ ( $\alpha=2$, 、 $\beta=1$ )，上 2 式與式(14)及(12)相同。圖 18 展示不同參數值 $\gamma$ 對賣場影響面積之變化，2 賣場面積比值固定為 $S=0.5$。圖中 $\gamma=0.5$ 所代表之曲線即為現行採用之數學模型。依據圖形顯示，當採用不同參數值時，其結果相差甚大，當然此僅為理論性探討，並非所有 $\gamma$ 數值皆合理。若 $\gamma=\beta/\alpha$ 值偏大，則代表居民購物行為受到賣場面積影響之程度大於距離遠近；若 $\gamma=\beta/\alpha$ 值偏小，則有相反之趨勢。

最後舉一範例說明數學模型之應用。假設某城鎮面積為 10 平方公里(半徑約為 1.784 公里)，其中心蓋有一座佔地 10,000 平方公尺之購物賣場。倘若某業者擬投資興建另一座面積較小之賣場，則依據本模式推測，為獲得最大商業利潤，該賣場之建議資料如表 1 所示。

表 1 新建賣場參考資料

| 新賣場面積 (平方公尺) | 兩賣場相隔距離 (公尺) | 新建賣場影響面積 (平方公尺) |
|---|---|---|
| 1000 | 1297.86 | 601521.984 |
| 3000 | 1009.74 | 1422647.232 |
| 5000 | 799.23 | 2138744.832 |
| 7000 | 592.29 | 2877121.024 |
| 9000 | 330.04 | 3819187.200 |

## 四、結論

透過本研究可精確探討新建賣場如何吸引附近民眾購物，由於城市所在範圍並非無限延伸，數學分析較為複雜。圖 17 為解析總覽，投資業者可由本圖查知新興賣場吸引範圍之變化趨勢，特別是當新建賣場面積較原有者為小時，應將第 2 賣場蓋予臨界位置上。本研究僅為一極簡化之數學模型，應配合興建成本、市街狀況及其它相關調查為之。另亦可考慮其它影響因子作用，使分析結果更趨準確，唯必須先找出該等因子與每年(或每季)民眾購物消費人次數之函數關係。

## 參考文獻

[1] 郭滄海、劉松田、鄭國順，民國 72 年，微積分，六藝出版社。

[2] 羅浩源，民國 87 年，生活的數學，九章出版社。