多屬性決策之直覺模糊排列評估法及資料簡化實驗分析

The Intuitionistic Fuzzy Permutation Method in Multiple Attribute Decision Making and Experimental Analysis on Data Collection Reduction

陳亭羽 湯宇達

Ting-Yu Chen Yu-Ta Tang

摘要

多屬性決策不但可處理多目標間的衝突、模糊問題之外，尚可處理優先次序不同的問題，因而在應用面上受到廣泛地探討。本研究是以直覺模糊集合為基礎來發展多屬性決策問題中的直覺模糊排列評估法，目的在於解決因直覺模糊權重資料蒐集的困難，以建構數學規劃模型求解，提出一套新的排列評估法。在資料簡化之計算實驗部份，採用亂數模擬分析的方式，計算一致率、矛盾率、反轉率與等級相關係數四大指標，比較最後的結果是否和未變化前一致。實驗結果發現，當控制方案個數時，前三個指標的平均維持相當高的程度，等級相關係數的部分，也呈現出平均值越高，標準差越低的趨勢。因此可得知，若要進行簡化的程序，可在矩陣或權重部分進行部份簡化；此外，當所需之決策方案個數增加時，轉換前後的決策矩陣，其運算結果會越趨一致。

關鍵詞：多屬性決策、直覺模糊排列評估法、數學規劃模型、計算實驗。

ABSTRACT

The multiple attribute decision making analysis has been comprehensively discussed because it can not only deal with the conflict of multiple objectives and fuzzy problems, but the difference of preference orders as well in terms of reasonable opinions and analytic techniques. Based on the intuitionistic fuzzy sets, this study explores the intuitionistic fuzzy permutation method in multiple attribute decision making problems in order to solve the difficulty of intuitionistic fuzzy data collections and proposes a mathematical programming model. By means of the computational experiment with random numbers, four indices of the consistency rate, contradiction rate, inversion rate, and Spearman rank order correlation coefficient compare whether the outcomes are consistent with that without transformation. The experimental results indicate that when the number of alternatives is restrained, the first three indices maintain quite high average values. In addition, the rank order correlation coefficients show the higher the average values, the lower the deviations of average values. As a consequence, if we want to simplify the procedure of permutation method, the matrices and weights are the most appropriate part to be simplified. Moreover, when the number of alternatives in a decision increases, the results of computation between simplified and non-simplified data converge eventually.

Keywords： Multiple Attribute Decision Making, Intuitionistic Fuzzy Permutation Method, Mathematical Programming Model, Computational Experiment

一、緒論

多屬性決策問題應用在實務面普遍應用且受到廣泛地討論。在決策的過程當中決策者多會進行主觀判斷，因此許多學者開始引入模糊集合(Fuzzy sets; Zadeh, 1965)的觀念，發展並探討模糊多屬性決策的分析方法。模糊理論領域中，直覺模糊集合(Intuitionistic fuzzy sets, IFS; Atanassov, 1986)近年來常被作為研究，亦有一些文獻陸續發展直覺模糊多屬性決策的分析方法(Li, 2005; Lin et al., 2007; Liu and Wang , 2007; Szmidt and Kacprzyk,

陳亭羽 長庚大學工商管理學系副教授
湯宇達 長庚大學企業管理研究所碩士

2004; Pasi et al., 2004)。Xu and Yager(2006)表示以直覺模糊集合來表達偏好程度是比單一的確切數值或語意變數更為合適。Pankowska and Wygralak (2006)研究具有三角模糊特性的直覺模糊集合在群體決策中的應用。Li et al.(2009)採用規劃模型結合 TOPSIS (Technique for order preference by similarity to ideal solution)的方法於群體決策問題中。Boran et al.(2009)將 TOPSIS 方法結合直覺模糊集合應用在直覺模糊群體決策中，進行供應商的挑選。Zhang and Jiang(2009)以區間直覺模糊集合為基礎，提出新的相似性測度方法，利用計分函數與 Hausdorff 距離來進行方案排序。Wang and Xu(2010)利用區間直覺模糊集合來給定決策者在屬性與方案中之偏好關係，再利用 TOPSIS 方法進行排序，並應用在投資評估決策上。在直覺模糊多屬性決策的分析方法中，大部分皆為計分模型(Scoring model)的應用，鮮少有關優勢排序法(Outranking method)的探討，因此，本研究是以直覺模糊集合為基礎，鎖定優勢排序法中的排列評估法為研究主題。

優勢排序法廣泛的應用於多屬性決策 (Multiple attribute decision making, MADM)上，主要特色是比較所有以二元關係式組成的替代方案，優點在於不同以往的計分模式，可直接得到一組方案的優列排序，並且提供最終的建議(Roy and Vanderpooten, 1996)。其中，Paelinch (1976)提出排列評估法(Permutation method)，是將所有替選方案的優先順序排列，並對各排列順序求算其一致性與不一致性的評分，再得到各排列方式的指標值，選擇最高的指標值所代表的排列順序，以決定出最適方案。在國內相關研究方面，蕭再安、王昌隆(1992)應用於公共設施區位選擇，以三階段之方式建立多目標決策分析模式，包括(1)篩選模式；(2)多準則評估模式；(3)群體決策模式，並結合 AHP 與排序評估法，使用折衷規劃法整合群體意見，求得最佳公共設施區位。

本研究以直覺模糊集合為基礎延伸排列評估法，提出直覺模糊排列評估法(Intuitionistic fuzzy permutation method, IF permutation method)。在本研究裡，由於決策矩陣所需數值為直覺模糊資料，易使資料蒐集不易，因此在屬性的績效程度上嘗試改以直覺模糊集合的屬性取代原本清晰的數值；在權重上由於直覺模糊集合的權重為一範圍值，因此建構線性規劃模組求解，使得蒐集不全的排序資料能為決策矩陣所用。最後，進一步以模擬實驗的方式探討資料不全時的實驗分析。

實驗分析的部分，主要藉由亂數來產生決策矩陣，應用於直覺模糊排列評估法，並利用斯皮爾曼等級相關(Spearman rank order correlation)統計方法，計算出等級相關係數、平均值及標準差，來觀察實驗結果的一致性與變異性。對於方案順序部份，將計算一致率(Consistency rate)和矛盾率(Contradiction rate)，前者是判斷兩種方案順序是否完全一致，後者則是因為在決策的過程中，決策者選擇的大多為最佳的方案解，因此將比較兩個決策矩陣的最佳解是否一致。最後會計算反轉率(Inversion rate)，將決策方案分為前後兩個部份，前面的部份代表較優解，而後面的部份代表較劣解，計算兩個決策矩陣所求的解，是否有一個方案同時落在較優解及較劣解，以驗證本研究方法在資料簡化設計下之適用性。因此，本研究的目標在於提出一套排列評估法，並希望能滿足以下兩點目的，(1)以直覺模糊為基礎發展直覺模糊排列評估法；(2)以線性規劃的角度求取最佳權重，並檢驗最後所得到的結果是否和簡化前的結果一致。

二、方法論

2.1 直覺模糊集合與定義

多屬性決策問題通常由含糊且不明確的資料建構而成，個體的偏好評定通常是模糊(Vague)且無法直接透過簡單數值表示，因此，Zadeh(1965)提出模糊集合理論，數十年來已成功運用在許多不同領域(Deschrijver and Kerre, 2003)。模糊集合最主要的特徵在於有隸屬程度(Membership degree)與非隸屬程度(Non-membership degree)，隸屬程度是每一個元素隸屬於該集合的程度，範圍介在零到一之間，非隸屬程度為一減去隸屬程度，兩程度的界定賦予了不精確性模糊概念的確立。但這單一數值無法告訴我們游移不定程度(Hesitancy degree)，在實際運用時，決策者對於模糊概念及隸屬度可能是不完整的，隸屬度與非隸屬度的總和可能會少於 1 (Liu and Wang, 2007)。因此，為了解決此種情況，Atanassov(1986)延伸模糊集

合，發展了直覺模糊集合，以模糊集合為基礎構建一個普遍化的概念(Atanassov, 1983)。主要將二值邏輯中非 0 即 1 的觀念轉換成模糊集合中[0,1]區間中的一個值，並結合模糊集合的觀念，將模糊集合中[0,1]區間中的一個值，擴展為有範圍觀念的區間值，直覺模糊的定義介紹如(1)所示。

令 E 為一固定論域，A 為在 E 上的一個直覺模糊集合 (Atanassov, 1986)：

$$A=\left\{\left(x,\mu_A\left(x\right),\nu_A\left(x\right)\right)|\, x\in E\right\} \tag{1}$$

在所有元素 $x\in E$ 中，函數 $\mu_A:E\to[0,1]$ 和 $\nu_A:E\to[0,1]$ 分別代表 A 集合的隸屬程度與非隸屬程度，並對 A 上的所有 $x\in E$，$0\le\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1$ 皆成立。

對於 E 中的每個直覺模糊集合子集，稱 $\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)$ 為 A 中 x 的直覺指標(Intuitionistic index)，表示 x 對 A 的不確定性(Atanassov, 1999)，或是表游移程度的一種測度(Szmidt and Kacprzyk, 2000)。因此，對於所有 $x\in E$ 中，$0\le\pi_A(x)\le 1$，且對於 E 中的任一普通模糊子集合 A，$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\left[1-\mu_A(x)\right]=0$，$\forall x\in E$。

2.2 直覺模糊的線性規劃模式

線性規劃最早是由 Dantzig (1951)所提出，為一種決策工具，主要研究線性最優化(Optimization)問題，目的在於求取一組變量特定質，使之在滿足各個限制式下同時也達到目標函數的最小值/最大值。將之於運用在直覺模糊的環境中，Li(2005)架構了一些線性規劃的模型，其目的為利用 IFS 的特性替每一個屬性找到最適的權重組合。此外，Lin et al. (2007)提出了一個以 IFS 為基礎處理 MADM 模糊決策問題的方法，主要概念為利用 IFS 表示替選方案的特點，每個替選方案的滿意度和非滿意度皆可用隸屬函數和非隸屬函數表示，準則亦可利用隸屬度和非隸屬度的觀念表達模糊概念的重要程度。因此，此方法不僅使用 IFS 表達出準則的重要性，同時，更使計算上的複雜度降低。

2.3 直覺模糊排列評估法使用線性規劃求權重值

在屬性權重值的部份，本研究使用直覺模糊集合來表示。在直覺模糊集合中 μ 代表的是隸屬程度的下界，而 $1-\nu=\mu+\pi$ 代表為隸屬程度的上界，因此可使用線性規劃的單形法來進行規劃求解。

直覺模糊排列評估法假設方案 A_i $(i=1,2,\ldots,m)$，屬性 X_j $(j=1,2,\ldots,n)$，並且給予每個屬性一個權重值 w_j $(j=1,2,\ldots,n)$，$w_j\in[0,1]$，每個屬性權重值和為 1，決策矩陣 D 中的元素包括 $\mu_{ij},\nu_{ij},\pi_{ij}$，用以表示第 i 個方案在第 j 的屬性的表現程度，三者總和為 1，同(2)、(3)及(4)所示，每個屬性代表之權重直覺模糊集合，以(5)、(6)及(7)的 W 矩陣表示。

$$D=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} (\mu_{11},\nu_{11},\pi_{11}) & \cdots & (\mu_{1n},\nu_{1n},\pi_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\mu_{m1},\nu_{m1},\pi_{m1}) & \cdots & (\mu_{mn},\nu_{mn},\pi_{mn}) \end{pmatrix} \end{array} \tag{2}$$

$$\mu_{ij},\nu_{ij},\pi_{ij},(i=1,2,...,n),(j=1,2,...,m) \tag{3}$$

$$\mu_{ij}+\nu_{ij}+\pi_{ij}=1 \tag{4}$$

$$W=\begin{array}{c} \\ \mu \\ \nu \\ \pi \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} W_1 & \cdots & W_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{n1} \\ w_{12} & \cdots & w_{n2} \\ w_{13} & \cdots & w_{n3} \end{pmatrix} \end{array} \tag{5}$$

$$w_{ij},(i=1,2,...,n),(j=1,2,3) \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_{ij}=1 \tag{7}$$

當有 m 個方案時，會產生 $m!$組的排列組合，在方案排列的部份以 P_i 表示(P_i ,i=1,2,…,$m!$)。若要進行方案間(A_i與A_j)的優劣比較時，將使用隸屬度(μ)以及非隸屬度(ν)作比較運算，如公式(8)、(9)及(10)所示(Bustince and Burillo, 1996)：

1. $A_i\ge A_j$ 若且唯若 $\mu_{A_i}(x)\ge\mu_{A_j}(x)$ and $\nu_{A_i}(x)\le\nu_{A_j}(x)$ for all $x_j\in X$ (8)

2. $A_i\succeq A_j$若且唯若$\mu_{A_i}(x)\ge\mu_{A_j}(x)$ and $\nu_{A_i}(x)\ge\nu_{A_j}(x)$ for all $x_j\in X$ (9)

3. $A_i=A_j$若且唯若$A_i\ge A_j$ and $A_i\le A_j$ (10)

若 $A_k\ge A_l$，則代表 $\mu_{kj}\ge\mu_{lj}$ and $\nu_{kj}\le\nu_{lj}$，此時可得到一個正的權重值 w_j；如果 $A_k\succeq A_l$，則代表 $\mu_{kj}\ge\mu_{lj}$ and $\nu_{kj}\ge\nu_{lj}$，此時可得到一個正的權重值 $0.5\,w_j$。此外，若有 i 組方案排列，表示方法為：

$P_i = (\ldots, A_k, \ldots, A_l, \ldots), i = 1, 2, \ldots, m!$，所列出的方案排列需要依序來計算屬性，計算 R_i 的公式如(11)~(15)：

$$R_i = \sum_{j\in C_{kl}} w_j + \sum_{j\in C'_{kl}} \frac{1}{2} w_j - \sum_{j\in D_{kl}} w_j - \sum_{j\in D'_{kl}} \frac{1}{2} w_j,\ i = 1, 2, \ldots, m! \tag{11}$$

$$C_{kl} = \{ j \mid A_k \ge A_l \},\ k, l = 1, 2, \ldots, m, k \ne l \tag{12}$$

$$C'_{kl} = \{ j \mid A_k \succeq A_l \},\ k, l = 1, 2, \ldots, m, k \ne l \tag{13}$$

$$D_{kl} = \{ j \mid A_k \le A_l \},\ k, l = 1, 2, \ldots, m, k \ne l \tag{14}$$

$$D'_{kl} = \{ j \mid A_k \preceq A_l \},\ k, l = 1, 2, \ldots, m, k \ne l \tag{15}$$

其中，C_{kl} 為一致順序集合(Concordance set)，表示所有 $A_k \ge A_l$ 的子集合，C'_{kl} 則為所有 $A_k \succeq A_l$ 的子集合；D_{kl} 為不一致順序集合(Discordance set)，表示所有 $A_k \le A_l$ 的子集合，D'_{kl} 則是所有 $A_k \preceq A_l$ 的子集合。上述子集合共分成四種：

1. C_{kl} 是所有 $A_k \ge A_l$ 的子集合，稱為強一致順序集合。
2. C'_{kl} 是所有 $A_k \succeq A_l$ 的子集合，稱為弱一致順序集合。
3. D_{kl} 則是所有 $A_k \le A_l$ 的子集合，稱為不一致順序集合。
4. D'_{kl} 則是所有 $A_k \preceq A_l$ 的子集合，稱為弱不一致順序集合。

此外，R_i 代表符合 P_i 方案排列順序的各屬性權重值的總和。進一步，針對目標式 R_i 作線性規劃，計算公式如(16)、(17)及(18)：

$$Max: R_i = \sum_{j\in C_{kl}} w_j + \sum_{j\in C'_{kl}} \frac{1}{2} w_j - \sum_{j\in D_{kl}} w_j - \sum_{j\in D'_{kl}} \frac{1}{2} w_j,\ i = 1, 2, \ldots, m! \tag{16}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \ldots. + w_n = 1 \tag{17}$$

$$\begin{aligned} & w_{11} \le w_1 \le w_{11} + w_{13} \\ & w_{21} \le w_2 \le w_{21} + w_{23} \\ & w_{31} \le w_3 \le w_{31} + w_{33} \\ & w_{41} \le w_4 \le w_{41} + w_{43} \\ & \qquad \cdots \\ & w_{n1} \le w_n \le w_{n1} + w_{n3} \end{aligned} \tag{18}$$

規劃求得各屬性之權重值後，可計算出最大的 R_i 值。當 $m!$ 個 R_i 值計算出後，取 R_i 值最大的 P_i 方案順序，即為欲求之最適解。

2.4 數值例說明

假設決策矩陣的方案個數為 4，屬性個數為 5，表 $A_i\ (i = 1,2,3,4)$ 以及屬性 $X_j\ (j = 1, 2, 3, 4, 5)$，各屬性的權重給訂為 w = (0.2430, 0.2850, 0.1400, 0.1240, 0.2080)，決策矩陣如(19)所示，各元素為隸屬程度與非隸屬程度，各屬性的權重值如(20)所示：

已知共有 24(=4!)個的方案排列組合需要計算，以下以 P_4 為例，$P_4 = (A_1, A_3, A_4, A_2)$，計算 P_4 的結果如矩陣 C^4 (21)所示：

$$D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0.1460, 0.1860) & (0.2740, 0.0520) & (0.2140, 0.5000) & (0.4230, 0.2460) & (0.4810, 0.4350) \\ (0.6710, 0.0420) & (0.4780, 0.2340) & (0.3760, 0.2950) & (0.6710, 0.2480) & (0.2480, 0.4520) \\ (0.0040, 0.7210) & (0.1740, 0.5100) & (0.6500, 0.2480) & (0.6210, 0.1150) & (0.8400, 0.0350) \\ (0.0520, 0.4250) & (0.6440, 0.2080) & (0.4840, 0.3170) & (0.8450, 0.0500) & (0.1280, 0.6320) \end{pmatrix} \end{array} \tag{19}$$

$$W = \begin{array}{c} \\ \mu \\ \nu \\ \pi \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3778 & 0.2197 & 0.0843 & 0.0753 & 0.1833 \\ 0.6032 & 0.1549 & 0.6586 & 0.8635 & 0.0423 \\ 0.0190 & 0.6254 & 0.2571 & 0.0612 & 0.7744 \end{bmatrix} \end{array} \tag{20}$$

$$
C^4 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 4 & 2 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & w_5 & w_5 & w_5 \\
w_1 + w_2 + w_3 + w_4 & 0 & w_1 + w_2 + w_3 + w_4 & w_1 + w_4 \\
w_1 + w_2 + 0.5w_3 + w_4 & 0.5w_5 & 0 & w_1 + 0.5w_4 \\
0.5w_1 + w_2 + 0.5w_3 + w_4 & w_2 + 0.5w_3 + 0.5w_5 & w_2 + w_3 + 0.5w_5 & 0
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{21}
$$

其中，因為 $\mu_{15}(=0.6872) \geq \mu_{35}(=0$ and $\nu_{15}(=0.0560) \leq \nu_{35}(=0.1322)$，給予 w_5 的值，$c_{13} = \sum_{j \in C_{13}^4} w_j = w_5$。又因 $\mu_{31}(=0.9307) \geq \mu_{11}(=0.419)$ and $\nu_{31}(=0.0058) \leq \nu_{11}(=0.2595)$，給予 w_1 的值。因為 $\mu_{32}(=0.4731) \geq \mu_{12}(=0.2952)$ and $\nu_{32}(=0.2158) \leq \nu_{12}(=0.5636)$，給予 w_2 的值。因為 $\mu_{33}(=0.5) \geq \mu_{13}(=0.53)$ and $\nu_{33}(=0.0572) \leq \nu_{13}(=0.1361)$，給予 w_3 的值。因為 $\mu_{34}(=0.9606) \geq \mu_{14}(=0.4997)$ and $\nu_{34}(=0.0102) \leq \nu_{14}(=0.3407)$，給予 w_4 的值，$c_{31} = \sum_{j \in C_{13}} w_j = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$。

R_4 的計算結果為 $R_4 = \sum_{j \in C_{31}} w_j - \sum_{j \in D_{31}} w_j = \frac{1}{2} w_1 - 4w_2 - \frac{5}{2} w_3 - \frac{1}{2} w_4 + \frac{3}{2} w_5$，$\sum_{j \in C_{13}} w_j = c_{13} + c_{14} + c_{12} + c_{34} + c_{32} + c_{42}$，等於矩陣 C^4 中的上三角形部份的總合，而 $\sum_{j \in C_{13}^4} w_j = c_{31} + c_{41} + c_{43} + c_{21} + c_{23} + c_{24}$，會等於矩陣 C^4 中的下三角形部份的總合。

接著進行線性規劃的運算，如式子(22)~(30)所示：

$$R_4 = 0.5w_1 - 4w_2 - 2.5w_3 - 0.5w_4 + 1.5w_5 \tag{22}$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5 = 1 \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &0.3778 + 0.2197 + 0.0843 + 0.0753 + 0.1833 \\ &= 0.9404 \leq 1 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &(0.3778 + 0.0190) + (0.2197 + 0.6254) + \\ &(0.0843 + 0.2571) + (0.0753 + 0.0612) + \\ &(0.1833 + 0.7744) = 2.6775 \geq 1 \end{aligned} \tag{25}$$

$$0.3778 \leq w_1 \leq 0.3778 + 0.0190 \tag{26}$$

$$0.2197 \leq w_2 \leq 0.2197 + 0.6254 \tag{27}$$

$$0.0843 \leq w_3 \leq 0.0843 + 0.2571 \tag{28}$$

$$0.0753 \leq w_4 \leq 0.0753 + 0.0612 \tag{29}$$

$$0.1833 \leq w_5 \leq 0.1833 + 0.7744 \tag{30}$$

最後求解結 $w_1 = 0.3778,\ w_2 = 0.2197,\ w_3 = 0.0843,\ w_4 = 0.0753,\ w_5 = 0.2429,\quad R_4 = 0.5w_1 - 4w_2 - 2.5w_3 - 0.5w_4 + 1.5w_5 = -0.5741$。

在重複進行相同的步驟之後，24 個矩陣 C^i 可分別計算出各自的 R_i，R 為 24 個 R_i 的集合，結果如下：

R= {R_1=0.6932, R_2= –1.9645 , R_3= –0.5539 , R_4=–0.5741 , R_5=–1.9847 , R_6=–1.8453 , R_7=0.0972, R_8=–1.3983 , R_9=1.1695, R_{10}=2.3519, R_{11}=0.3649, R_{12}=0.9019, R_{13}=0.5341, R_{14}=0.5924, R_{15}=1.2791, R_{16}=2.4615, R_{17}=1.7748, R_{18}=2.5605, R_{19}=–1.0407 , R_{20}= –0.9013 , R_{21}= –0.4447 , R_{22}=0.8221, R_{23}=0.3248, R_{24}=1.1104}

因此，在集合 R 中 R_{18}=2.5605 為最大值，因此最佳的方案順序為 P_{18}=(A_3, A_4, A_2, A_1)。

三、實驗分析

首先，本研究會進行簡化作業的程序，接著再利用實驗分析作驗證。決策矩陣的簡化乃指直覺模糊集合中的隸屬度(μ)、非隸屬度(ν)、不確定程度(π)，各用來表示各方案於各屬性的表現程度，並直接給予每個屬性一個權重值 w_j，以三個模糊集合的屬性取代原本的清晰資料來進行運算。研究期望驗證的排序結果與簡化前的排序結果為「高度相關」，以便日後在進行矩陣的排序評估時，可以利用簡化序列資料後的決策矩陣來取代原始的 IFS 矩陣。

3.1 簡化決策矩陣的方法

除了基本的方案評估方法外，直覺模糊排序評估法可使用在具順序的方案。假設決策者只給定方案的每個屬性排列順序，進一步如要知道屬性相關間的重要性，就必須由直覺模糊資料、或是基數的權重來決定。因此，直覺模糊排序評估法的特點在於資料要求的限制，決策者已無必要規範

決策矩陣中的屬性性質。

有一個簡單的方法可以轉換屬性排列值為直覺模糊資料，此方法相似於 Grzegorzewski 於 2004 年所提出的方式，使用計算方案其數值確實劣於(不包括等於關係)和確實優於(不包括等於關係)特定方案。本研究主要強調點為此方法允許順序資料的不完整，並非所有方案的各個屬性皆；可以被排列出順序。因此，考慮到資料遺失或是屬性無法比較的情況，本研究定義出兩個函數：$\alpha_j(A_i)$ 和 $\beta_j(A_i)$，其中，$\alpha_j(A_i)$ 表 A1, A2,⋯, Ai-1, Ai+1, Ai+2,⋯, Am 確實劣於 Ai ；$\beta_j(A_i)$ 則表示確實優於 Ai ，方案 A_i $(i=1,2,\ldots,m)$ 及屬性 X_j $(j=1,2,\ldots,n)$。隸屬程度與非隸屬程度分別定義如(31)、(32)，同時，最小下界與最大上界可表示為(31)、(33)。此外，當發生在決策者分配超過一個以上的方案順序一致，或一些方案無法和其他方案比較時，會發生(34)的情況。舉例來說，在直覺模糊決策矩陣 D 中，屬性偏好為弱一致 C'_{kl} 或弱不一致 D'_{kl} 皆屬於無法比較的關係。

$$\mu_{A_i}(x_j)=\frac{\alpha_j(A_i)}{m-1} \tag{31}$$

$$\nu_{A_i}(x_j)=\frac{\beta_j(A_i)}{m-1} \tag{32}$$

$$1-\nu_{A_i}(x_j)=\frac{m-1-\beta_j(A_i)}{m-1} \tag{33}$$

$$\alpha_j(A_i)+\beta_j(A_i)<m-1(\text{假設：}\pi_{A_i}(x_j)>0) \tag{34}$$

3.2 簡化決策矩陣的數值例說明

假設決策矩陣的方案個數為 4，屬性個數為 5，表 A_i $(i=1,2,3,4)$ 以及屬性 X_j $(j=1,2,3,4,5)$，各屬性的權重給訂為 $w=(0.2430,0.2850,0.1400,0.1240,0.2080)$，決策矩陣各元素為隸屬程度與非隸屬程度，如(35)所示。

$$D=\begin{array}{c} \\ A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}(0.1460,0.1860) & (0.2740,0.0520) & (0.2140,0.5000) & (0.4230,0.2460) & (0.4810,0.4350)\\ (0.6710,0.0420) & (0.4780,0.2340) & (0.3760,0.2950) & (0.6710,0.2480) & (0.2480,0.4520)\\ (0.0040,0.7210) & (0.1740,0.5100) & (0.6500,0.2480) & (0.6210,0.1150) & (0.8400,0.0350)\\ (0.0520,0.4250) & (0.6440,0.2080) & (0.4840,0.3170) & (0.8450,0.0500) & (0.1280,0.6320)\end{pmatrix}\end{array} \tag{35}$$

以下以 X_1 屬性為說明例(36)，共經四個步驟的計算完成決策矩陣簡化的動作。

$$D=\begin{array}{c} \\ A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc} \mu & \nu & \pi\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.1460 & 0.1860 & 0.6680\\ 0.6710 & 0.0420 & 0.2870\\ 0.0040 & 0.7210 & 0.2750\\ 0.0520 & 0.4250 & 0.5230\end{bmatrix}\end{array} \tag{36}$$

1. 由 D 矩陣可得知，$\mu_1(=0.1460)\le\mu_2(=0.6710)$ and $\nu_1(=0.1860)\ge\nu_2(=0.0420)$，因此 $A_1\le A_2$；$\mu_1(=0.1460)\ge\mu_3(=0.0040)$ and $\nu_1(=0.1860)\le\nu_3(=0.7210)$，因此 $A_1\ge A_3$；$\mu_1(=0.1460)\ge\mu_4(=0.0520)$ and $\nu_1(=0.1860)\le\nu_4(=0.4250)$，$A_1\ge A_4$。最後可得在屬性 X_1 中劣於 A_1 的筆數為 1，優於 A_1 的筆數為 2，無法判定的筆數為 0，則 $\mu'_1=\frac{1}{3},\nu'_1=\frac{2}{3},\pi'_1=\frac{0}{3}=0$。

2. 由 D 矩陣可得知，$\mu_2(=0.6710)\ge\mu_1(=0.1460)$ and $\nu_2(=0.0420)\le\nu_1(=0.1860)$，因此 $A_2\le A_1$；$\mu_2(=0.6710)\ge\mu_3(=0.0040)$ and $\nu_2(=0.0420)\le\nu_3(=0.7210)$，因此 $A_2\ge A_3$；$\mu_2(=0.6710)\ge\mu_4(=0.0520)$ and $\nu_2(=0.0420)\le\nu_4(=0.4250)$，$A_2\ge A_4$。最後可得在屬性 X_1 中劣於 A_2 的筆數為 0，優於 A_2 的筆數為 3，無法判定的筆數為 0，則 $\mu'_2=\frac{0}{3},\nu'_2=\frac{3}{3},\pi'_2=\frac{0}{3}=0$。

3. 由 D 矩陣可得知，$\mu_3(=0.0040)\le\mu_1(=0.1460)$ and $\nu_3(=0.7210)\ge\nu_1(=0.1860)$，因此 $A_3\le A_1$；$\mu_3(=0.0040)\le\mu_2(=0.6710)$ and $\nu_3(=0.7210)\ge\nu_2(=0.0420)$，因此 $A_3\le A_2$；$\mu_3(=0.0040)\le\mu_4(=0.0520)$ and $\nu_3(=0.7210)\ge\nu_4(=0.4250)$，$A_3\le A_4$。最後可得在屬性 X_1 中劣於 A_3 的筆數為 3，優於 A_3 的筆數為 0，無法判定的筆數為 0，則 $\mu'_3=\frac{3}{3}=1,\nu'_3=\frac{0}{3}=0,\pi'_3=\frac{0}{3}=0$。

4. 由 D 矩陣可得知，$\mu_4(=0.0520)\le\mu_1(=0.1460)$ and $\nu_4(=0.4250)\ge\nu_1(=0.1860)$，因此 $A_4\le A_1$；$\mu_4(=0.0520)\le\mu_2(=0.6710)$ and $\nu_4(=0.4250)\ge\nu_1(=0.0420)$，因此 $A_4\le A_2$；$\mu_4(=0.0520)\ge\mu_3(=0.0040)$ and $\nu_4(=0.4250)\le\nu_3(=0.7210)$，$A_4\ge A_3$。最後可得在屬性 X_1 中劣於 A_4 的筆數為 2，優於 A_4 的筆數為 1，無法判定的筆數為 0，則 $\mu_4^{'}=\frac{2}{3}=0.6667,\quad \nu_4^{'}=\frac{1}{3}=0.3333,\quad \pi_4^{'}=\frac{0}{3}=0$。

綜合上面的計算結果歸納如(37)所示：

$$\begin{array}{c} \\ A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\mu & \nu & \pi\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.1460 & 0.1860 & 0.6680\\ 0.6710 & 0.0420 & 0.2870\\ 0.0040 & 0.7210 & 0.2750\\ 0.0520 & 0.4250 & 0.5230\end{bmatrix}\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c} \\ A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\mu & \nu & \pi\end{array}\\ \begin{bmatrix}0.3333 & 0.6667 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0.6667 & 0.3333 & 0\end{bmatrix}\end{array} \tag{37}$$

重複上述步驟後，將可以得到轉換後之矩陣 $D^{'}$，各元素為隸屬程度與非隸屬程度，如(38)所示。

$$D^{'}=\begin{array}{c} \\ A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{array}\\ \begin{pmatrix}(0.3333,0.6667) & (0.0000,0.3333) & (1.0000,0.0000) & (0.6667,0.0000) & (0.3333,0.6667)\\ (0.0000,1.0000) & (0.3333,0.3333) & (0.3333,0.3333) & (0.3333,0.0000) & (0.6667,0.3333)\\ (1.0000,0.0000) & (1.0000,0.0000) & (0.0000,1.0000) & (0.3333,0.3333) & (0.0000,1.0000)\\ (0.6667,0.3333) & (0.0000,0.6667) & (0.3333,0.3333) & (0.0000,1.0000) & (1.0000,0.0000)\end{pmatrix}\end{array} \tag{38}$$

3.3 比較指標的介紹

1. 等級相關係數：若計算出來的等級相關係數很高，表示簡化後的矩陣並不會喪失太多的資訊量，也就是說經過簡化程序後的排序與簡化前的排序必須具有一致性，因此本研究可以使用簡化後的矩陣資料。

   (1) 等級相關係數的平均數：計算兩個決策矩陣的結果是否相近(一致性)。

   (2) 等級相關係數的標準差：主要為觀察兩矩陣間變異性的大小。

2. 一致率(consistency rate)：也就是檢驗兩種方案的順序是否完全一致。決策者會選擇排序第一的方案解，為最適的方案解。對於排序第二、第三甚至是之後的方案解，決策者通常不去理會。除非是程序發生了變化以致於第一個方案解不可行，所以本研究要探討的為簡化前後的方案順序是否一致。

3. 矛盾率(contradiction rate)：由於在決策過程中，決策者選擇的大多為最佳的方案解，因此將比較兩個決策矩陣的最適解是否一致。但是在實際的狀況中，決策會受到相關單位或利益團體的影響，因此若無法選擇最適的方案解，決策者可以選擇次佳的方案解或是排序第三的方案解。

4. 反轉率(inversion rate)：將決策方案分為前後兩個部份，前面的部份代表較優解，後面的部份代表較劣解，計算兩個決策矩陣所求的解，是否有一個方案同時落在較優解以及較劣解。以驗證本研究所提出決策方法的實用性。

4. 實驗結果

本研究將使用模擬資料進行驗證，模擬資料包括了一個使用直覺模糊集合的決策矩陣以及其屬性之權重。在方案數部份將有 8 個 A_m，而個屬性部份有 8 個 X_n，因此總共會產生 $m\times n$ (=8×8=64)種不同大小的矩陣。每個矩陣種類將會以 MATLAB 亂數產生 1,000 筆模擬資料，以避免資料的歧異性。

圖 1 為一致率之折線圖，從圖中可以看出一致率隨著方案個數的增加，從 0.68 一路降低至幾乎等於 0，代表當方案個數上升時，簡化前後的兩個決策矩陣所計算出來的結果，完全相同的比例將會越來越低。尤其是當方案個數小於 4 之後，完全相同的比例將會大於 0.5，所以我們可以進行簡化的程序。一致率隨著方案個數的不同，其曲線會有明顯的變化，但是當方案個數不變之下，而屬性個數增加時，完全相同的比例變化並不明顯。

方案個數為 3 之時，其數值接近 0.68，為一致率最高的時候。而當方案個數為 10 的時候，一致率大約只有 0.01，為一致率最低的時候。

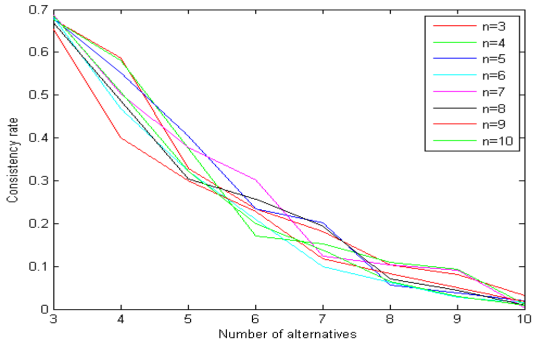

圖 1 一致率折線圖

圖 2 為矛盾率之折線圖，從圖中可以看出矛盾率隨著方案個數的增加，從 0.14 一直上升至 0.24。代表當方案個數上升時，兩決策矩陣計算出來之最佳方案的解，有相當大的差異。但是當方案個數小於 6 時，矛盾率大致上將會降低至 0.2 以下。當方案個數不變，而屬性個數增加時，矛盾率的變化沒有明顯的趨勢。方案個數為 10 之時，其數值接近 0.24，為矛盾率最高的時候。而當方案個數為 3 的時候，矛盾率大約只有 0.15，為矛盾率最低的時候。而且可以從折線圖觀察出只有當屬性個數為 5，其矛盾率之折線才有規律上升的現象發生，其餘的屬性個數之折線圖皆為不規則的曲線。但是在大致上，矛盾率之折線圖仍呈現出緩慢上升的趨勢。

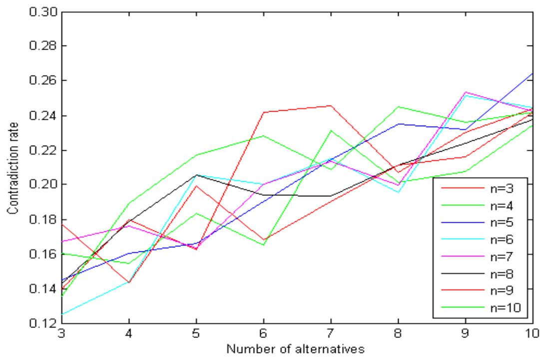

圖 2 矛盾率折線圖

圖 3 為反轉率之折線圖，從圖中可以看出反轉率隨著方案個數的增加，從 0.24 一路上升至 0.54，代表當方案個數上升時，簡化前後的兩個決策矩陣計算出來的結果，在較佳解與較劣解中，反轉的情況有上升的趨勢。而當方案個數小於 8 時，反轉率將會小於 0.5 以下。而當方案個數不變，屬性個數增加時，反轉率之間的變化並不明顯。方案個數為 10 之時，其數值接近 0.57，為反轉率最高的時候。而當方案個數為 3 的時候，反轉率大約只有 0.21，為反轉率最低的時候。由下圖我們可以觀察到，其反轉率之折線圖呈現規律上升的趨勢。

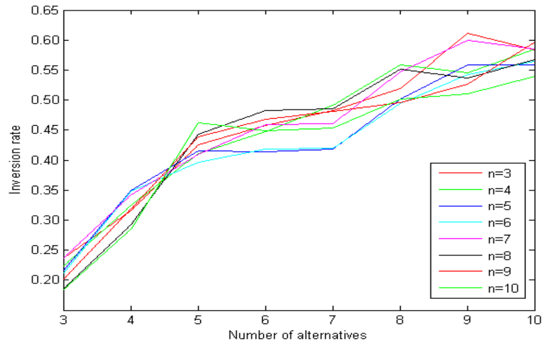

圖 3 反轉率折線圖

表 1 為使用規劃求解與未使用規劃求解之決策矩陣等級相關係數平均值和標準值表，轉化成 3D 圖型顯示為圖 4 及圖 5。圖 4 為等級相關係數平均值之曲面圖，從圖中可以看出隨著方案個數的增加，平均值的部分有明顯上升的趨勢，從 0.83 逐漸上升至 0.90，而標準差的部分亦呈現出明顯下降的情形，從 0.32 逐漸下降至 0.08，代表隨著方案個數增加時，兩決策矩陣計算出來的結果間越相近。最高點發生在方案個數為 10，屬性個數為 6 的時候，其等級相關係數平均值為 0.9001。而最低點發生在方案個數為 3，屬性個數為 10 的時候，其等級相關係數平均值為 0.7953。但是當方案個數不變，而屬性個數增加時，其平均值與標準差並沒有觀察出明顯的趨勢。我們由圖中可以觀察出這張曲面圖呈現出明顯的不規則起伏，在方案個數 3 上升至方案個數 4，平均值上升的幅度最大。除此之外，平均值的部分都呈現逐漸上升的情形，而在標準差的部分，當方案數大於 4 之後，標準差大致就降至 0.2 以下。

表 1 等級相關係數平均數與標準值表

等級相關係數平均值(標準差)								
方案個數	屬性個數							
	3	4	5	6	7	8	9	10
3	0.8295 (0.3543)	0.8261 (0.2985)	0.8351 (0.3091)	0.8287 (0.2699)	0.8252 (0.2979)	0.8052 (0.3154)	0.8118 (0.3130)	0.7953 (0.3402)
4	0.8463 (0.2183)	0.8475 (0.2121)	0.8500 (0.1721)	0.8528 (0.1742)	0.8463 (0.2034)	0.8537 (0.2428)	0.8372 (0.2224)	0.8420 (0.2128)
5	0.8658 (0.1621)	0.8571 (0.1679)	0.8595 (0.2060)	0.8473 (0.2007)	0.8459 (0.1841)	0.8647 (0.1615)	0.8625 (0.1699)	0.8691 (0.1609)
6	0.8577 (0.1886)	0.8541 (0.1697)	0.8728 (0.1515)	0.8709 (0.1839)	0.8768 (0.1453)	0.8709 (0.1296)	0.8717 (0.1596)	0.8678 (0.2031)
7	0.8856 (0.1641)	0.8816 (0.1147)	0.8763 (0.1444)	0.8889 (0.1387)	0.8652 (0.1504)	0.8692 (0.1190)	0.8814 (0.1354)	0.8750 (0.1744)
8	0.8654 (0.1186)	0.8800 (0.0907)	0.8877 (0.1733)	0.8757 (0.1632)	0.8730 (0.1040)	0.8910 (0.1041)	0.8800 (0.1376)	0.8902 (0.1444)
9	0.8656 (0.0725)	0.8720 (0.1333)	0.8763 (0.1489)	0.8827 (0.1475)	0.8920 (0.1411)	0.8852 (0.0860)	0.8914 (0.0874)	0.8964 (0.1339)
10	0.8774 (0.0769)	0.8880 (0.0929)	0.8873 (0.0779)	0.9001 (0.1003)	0.8808 (0.0946)	0.8944 (0.0881)	0.8996 (0.0868)	0.8965 (0.1140)

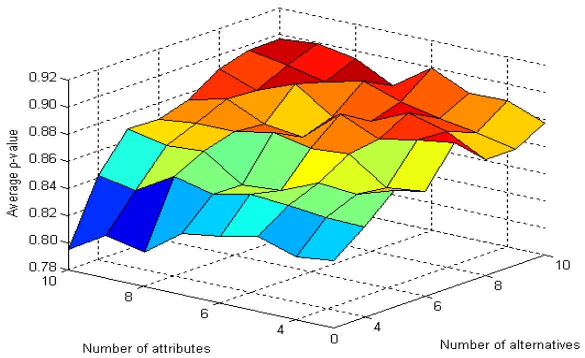

圖 4 等級相關係數平均值曲面圖

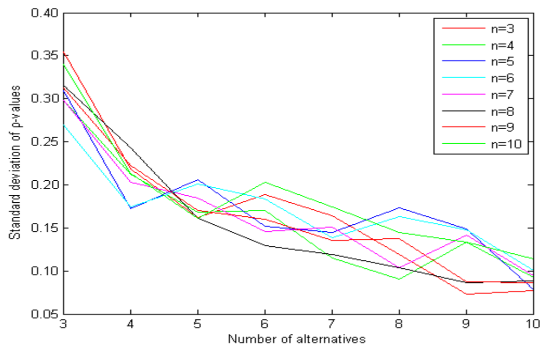

圖 5 等級相關係數標準差折線圖

圖 5 為等級相關係數標準差之折線圖，從圖中可以看出隨著方案個數的增加，標準差一路從 0.35 下降至 0.11，代表當方案個數增加時，兩決策矩陣計算出來的結果間變異性降低了。而當方案數大於 4 之後，標準差就會降低至 0.2 之下。而當方案個數不變，屬性個數增加時，等級相關係數標準差並沒有明顯的變化。方案個數為 3 之時，其數值接近 0.31，為等級相關係數標準差最高的時候。當方案個數為 10 的時候，標準差大約只有 0.09，為等級相關係數標準差最低的時候。

5. 結論

本研究擴展 Paelinck (1976)之排列評估法，以直覺模糊集合的概念，建構出一套新的直覺模糊排列的評估模式，並進一步以模擬實驗的角度進行驗證，透過直覺模糊集合的特性，解決資料中不確定性的問題，將不確定性的資料以直覺模糊集合的 π 值取代，再進行排列評估法的運算，使得決策者在決策的過程中能同時考量到不確定性的資料。除此之外，研究期望在喪失某些資訊量時，簡化後的結果並不會因為經由簡化程序後，與未簡化前的排序結果相差甚多，進而利用簡化後的結果以取代簡化前的結果。

在實驗數據的部份，簡化前後的兩個矩陣，在一致率的部份，完全相同的比例將會越來越低；矛盾率與反轉率則是呈現出緩慢上升的趨勢；等級相關係數的平均質和標準差呈現出明顯的不規則起伏，會根據方案個數的多寡而有相對應的情況

產生。

因此，本研究可以從實驗中歸納出一個結果，在簡化的程序中，如果將矩陣以及權重的部分同時進行簡化，其簡化後的結果將會和簡化前的結果相差太多。在未來的相關研究上，若要進行簡化的程序，只能在矩陣或權重部分進行部份的簡化，如此所運算出來的結果並不會與簡化前的結果差別甚大。且當所需要決策的方案個數增加後，轉換前後的決策矩陣運算結果會越趨一致，但相對的在決策的計算上相對也會繁複許多，方案個數會依照階乘而增加，必須依照決策的方案個數挑選本研究方法使用，以避免結果差異較大。

参考文獻

1. 蕭再安、王昌隆(1992)，「多目標決策方法在公共設施區位選擇之應用—以台北工專新校址評選為例」，<u>都市與計畫</u>，第 19 卷，第 1 期。
2. 林其堂(2004)，「最適廠辦大樓評選之研究」，<u>華梵大學工業管理學系碩士論文</u>。
3. Atanassov, K.T. (1983), *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Sofia: VII ITKR’s Session.
4. Atanassov, K.T. (1986), “Intuitionistic Fuzzy Set,” *Fuzzy Sets and Systems*, 20(1), 87-96.
5. Atanassov, K.T. (1999), *Intuitionistic Fuzzy Sets: Theory and Applications*, New York: Physica-Verlag, Heidelberg.
6. Boran, F.E., Genç, S., Kurt, M., and Akay, D. (2009), “A multi-criteria intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method,” *Expert Systems with Applications*, 36(8), 11363-11368.
7. Bustince, H. and Burillo, P. (1996), “Vague sets are intuitionistic fuzzy sets,” *Fuzzy Sets and Systems*, 79(3), 403-405.
8. Dantzig, G.B. (1951) “Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities”, In T. C. Koopmans, John Wiley and Sons (Eds.), *Research in Activity Analysis of Production and Allocation*, New York, 339-347.
9. Deschrijver, G., and Kerre, E.E. (2003), “On the relationship between some extensions of fuzzy set theory,” *Fuzzy Sets and Systems*, 133(2), 227-235.
10. Grzegorzewski, P. (2004), “On measuring association between preference systems,” *Proceedings of IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Budapest, Hungary.
11. Li, D.F. (2005), “Multiatribute decision making models and methods using intuitionistic fuzzy sets,” *Journal of Computer System Sciences*, 70(1), 73-85.
12. Li, D.F., Wang, Y.C., Liu, S., and Shan, F. (2009), “Fractional programming methodology for multi-attribute group decision-making using IFS,” *Applied Soft Computing*, 9(1), 219-225.
13. Lin, L., Yuan, X.H., and Xia, Z. Q. (2007), “Mulicriteria fuzzy decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets,” *Journal of Computer and Systems Sciences*, 73(1), 84-88.
14. Liu, H.W., and Wang, G.J. (2007), “Multicriteria decision-making methods based on intuitionistic fuzzy sets,” *European Journal of Operational Research*, 179(3), 220-233.
15. Paelinck, J.H.P. (1976), “Qualiflex: a flexible multiple-criteria method,” *Economics Letters*, 1, (3), 193-197.
16. Pankowska, A., and Wygralak, M. (2006), “General IF-sets with triangular norms and their applications to group decision making,” *Information Sciences*, 176(18), 2713-2754.
17. Pasi, G.,Y., and Atanassov, K., (2003), “Intuitionistic fuzzy graph interpretations of multi-person multi-criteria decision making: Generalized net approach,” *Proceedings of second IEEE International Conference Intelligent Systems*, 2(2), 434-439.
18. Roy, B., and Vanderpooten, D. (1996), “The European school of MCDA: Emergence, basic features and current works,” *Journal of*

Multi-criteria Decision Analysis, 5(1), 22-37.

19. Szmidt, E., and Kacprzyk, J. (2000), “Distances between intuitionistic fuzzy sets,” *Fuzzy Sets and Systems*, 114(3), 505-518.

20. Szmidt, E., and Kacprzyk, J. (2004), “A concept of similarity for intuitionistic fuzzy sets and its use in group decision making,” *Proceedings of International Joint Conference on Neural Networks & Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) International Conference on Fuzzy Systems*, Budapest, Hungary, 25-29.

21. Wang, Z., and Xu, J. (2010), “A fractional programming method for interval-valued intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making,” *Chinese Control and Decision Conference*, no. 5498947, 636-641.

22. Xu, Z.S., and Yager, R.R., (2006) “Some geometric aggregation based on intuitionistic fuzzy sets,” *International Journal of General Systems*, 35(4), 417-433.

23. Zadeh, L.A. (1965), “Fuzzy sets,” *Information and Control*, 8(3), 338-356.

24. Zhang, Q., and Jiang, S. (2009), “Interval-valued intuitionistic fuzzy approximate reasoning based on a new similarity measure,” *International Conference on Artificial Intelligence and Computational Intelligence*, no. 5376284, 505-509.