

# 有限量測點溫度同化之輪胎非等溫硫化動態重建方法研究

## Dynamic Reconstruction of Non-Isothermal Tire Curing Using Limited Temperature Measurements

宋旻峰

明志科技大學機械工程系

### 摘要

工業革命以來，輪胎是所有機動車輛必備的元件之一；也是推進世界繁榮的一大助手。然而看似不起眼的輪胎由複合且複雜的材料所組成，當工程師將結構與花紋設計完成之後會將未經處理過的橡膠進行一種名為"硫化"的程序；也是整個輪胎製程中最關鍵的程序之一。因為這程序會將輪胎完成最終的外觀與定型，然而橡膠在硫化過程若沒有妥善的溫度控管；橡膠過硫化(過度成熟)或硫化不佳(成熟度不足)都會導致輪胎操控性能下降甚至衍生客訴。因此本研究主要的目的在於輸入實務的生產條件並應用電腦數值分析方法預測橡膠產品達到的硫化時間。本研究的創新之處在於證明在僅有三個量測點與三組  $t_{90}$  的有限數據下，仍可建立具泛化能力的硫化溫度場重建。其創新在於將  $t_{90}$  由等溫性能指標轉化為非等溫速率基礎，再將有限測點由驗證工具轉化為場約束條件且在不增加實驗成本的前提下，顯著壓縮溫度與硫化預測誤差。此最小資訊硫化溫度場重建策略不僅具參考價值，更為實際輪胎硫化製程提供一種低成本且實用的品質控制方法。

**關鍵字：**輪胎、硫化、非等溫、數值模擬

### Abstract

Since the Industrial Revolution, tires have been indispensable components of all motor vehicles and have played a crucial role in driving global development. Despite their seemingly simple appearance, tires are composed of complex composite materials. After the structural and tread designs are completed, uncured rubber undergoes a process known as *vulcanization*, which is one of the most critical stages in tire manufacturing. This process determines the final shape and appearance of the tire. However, inadequate temperature control during vulcanization may lead to over-curing or under-curing, both of which can degrade tire handling performance and potentially result in customer complaints. Accordingly, the primary objective of this study is to incorporate realistic manufacturing conditions and apply numerical simulation methods to predict the curing time required for rubber products. The key contribution of this work lies in demonstrating that a generalized reconstruction of the vulcanization temperature field can be achieved using only three temperature measurement points and three sets of  $t_{90}$  data. The novelty of the proposed approach is twofold: first, the transformation of  $t_{90}$  from an isothermal performance index into a rate-based descriptor under non-isothermal conditions; second, the reinterpretation of limited measurement data from a validation tool into constraint conditions for field reconstruction. This enables a significant reduction in prediction errors for both temperature and curing behavior without increasing experimental costs. The proposed minimal-information reconstruction strategy for non-isothermal vulcanization temperature fields not only offers valuable theoretical insight but also provides a practical, low-cost solution for quality control in industrial tire curing processes.

**Keyword:** Tire, Vulcanization, Non-isothermal, Numerical simulation.

### 1. 前言

輪胎的製程攸關性能的優劣，因此各大輪胎廠無不針對產品的製程竭盡所能的提升改善再改善，近年來由於電腦硬體效能的進步與人工智慧的精進，已有愈來愈多廠商考慮導入結合人工智慧的電腦數值分析技術進行製程改善，其中由

Rafei[1]等人所提的文獻即整合有限元素法與運用改良型反應速率方程式描述熱固性或橡膠材料硫化(交聯)過程中轉化率隨時間與溫度變化的自催化反應模型動力學模型，成功建立厚橡膠製品非等溫硫化之完整模擬架構。該研究強調熱接觸電阻與熱性質隨硫化轉化率變化對預測精度之

關鍵影響，並以 RPA 非等溫數據驗證模型可靠性。由 Silva[2]等人所提出的一篇文獻則整合焦燒試驗、RPA 流變測試與三維電腦流體計算力學 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 模擬，建立橡膠擠出頭溫度場與流變行為之關聯模型。透過第二階聚合物流變方程式同時考慮剪切速率與溫度對黏度之影響，並結合 PID 溫控優化，成功消除提前硫化與浸潤不足問題。研究展現製程物性量測與數值模擬整合對高黏彈材料加工穩定性的關鍵意義。由 Chen[3]等人提出一種三段式硫化動力學模型 (誘導-硫化-還原)，成功描述非等溫條件下含還原效應之橡膠硫化行為，並結合 FEA 與自定義子程序實現厚橡膠產品的預測。模型在不同還原程度橡膠中皆呈現高擬合精度 ( $R^2 > 0.999$ ) 且與拉伸強度與疲勞壽命結果一致。由 Adam[4]等人提出以硫化程度為內部變數之熱-機械耦合有限元素材料模型，透過 Maxwell 型流變架構與乘法分解理論，成功描述橡膠由未硫化至完全硫化之轉變行為。模型同時整合溫度依賴自由能函數與硫化動力學，並於成形、壓縮、拉伸與流變儀測試中驗證其合理性。該研究為橡膠製程模擬與性能預測建立重要理論基礎。由 Erfanian[5]等人提出溫度依賴反應階數之改良 Kamal 動力學模型，並整合 CFD 與硫化動力學於三維注射成形模擬中。透過將反應階數設定為溫度之二次函數形式，有效將傳統常數階模型之平均誤差由 16.3% 降至 9.59%。模型成功預測最佳硫化時間，並與壓縮剛性實驗一致。Berger[6]等人則針對輪胎用製程數值模擬建立具熱-機械一致性之橡膠硫化材料模型，並整合分離式 ALE 有限元素架構以處理未硫化橡膠之大變形問題。透過單次積分點投影策略改善歷史變數對流誤差，相較雙重插值法顯著提升數值穩定性與壓力場準確度。數值結果證實 ALE 可有效降低網格扭曲所導致之失真現象。由 Zhao[7]等人所提出的一篇文獻主要探討輪胎蒸汽加熱硫化製程，並建立完整 3D 輪胎硫化模型，探討初始輪胎溫度與冷凝水排放策略對輪胎溫度場均勻性的影響。為了提升精確度，該研究建立完整的三維蒸汽-冷凝多相流與熱傳耦合模型，結合  $k-\omega$  SST 紊流模型與蒸發-冷凝機制，系統性的分析輪胎硫化過程之溫度變化。結果顯示初始預熱與冷凝液體積分率控制為提升硫化均勻性的關鍵因素。研究提供可量化之排水控制標準約介於 0.2~0.3% 之間，對降低溫差與優化能源利用具有實務價值。由 Liu[8]等人則探討輪胎硫化製程中的廢氣與熱排放控制問題，針對輪胎硫化機開模與冷卻階段所產生之揮發性有機化合物、懸浮微粒與高溫熱對流所引起的熱羽流 (Thermal Plume) 現象進行現場量測與 CFD 模擬優化。該研究提出 Push-Pull 與半封閉上吸罩整合方案，在 6000 m<sup>3</sup>/h 排風量下即可達 98% 以上的捕捉效率，相較傳統高懸罩顯著降低能耗。雖然與輪胎製品無關，但該研究透過數值方法改善橡膠硫化

製程之污染控制與節能優化提供解決方案。由 Ding[9]等人針對輪胎硫化機之電加熱熱板溫度均勻性優化，結果顯示溫度優化的結果將影響輪胎硫化品質與製程效率。該研究結合電-熱耦合有限元素分析與模糊 PID 控制策略，系統性優化輪胎硫化機電加熱熱板之溫度均勻性。透過結構設計使穩態溫差降至 0.83°C，並以一階滯後模型建立動態溫控方程式，模糊 PID 將溫度波動進一步壓縮至  $\pm 0.9$ °C。研究成果呈現了如何透過結構優化與智慧控制整合在硫化設備，進一步提升節能與品質穩定。由 Pandya[10]等人則針對輪胎硫化循環中之溫度延遲時間與溫升速率的分析，並利用 CFD 模擬輪胎氣囊 (Bladder) 內部流場與溫度分佈。該研究利用暫態 2D 軸對稱 CFD 模型與共軛熱傳分析，系統性探討輪胎硫化循環中膠囊內流動與溫度延遲機制。透過 SST  $k-\omega$  紊流模型與實驗驗證，證明流量調整可有效降低輪胎硫化製程的低溫熱水循環階段所造成的溫差並縮短延遲時間。研究成果顯示製程流體控制對硫化均勻性與能源效率能有效的改善。由 Behnke[11]等人所提出的一篇文獻則將時間依賴熱損傷模型整合至 ALE 熱-機械耦合有限元素架構中，用以模擬穩態滾動輪胎之自生熱與老化行為。透過一種以連續損傷變數描述材料內部微觀裂紋與劣化對整體力學性質影響的理論框架導入溫度-時間控制之損傷變數，成功描述橡膠不可逆剛度退化與結構響應改變。數值結果顯示熱損傷主要集中於胎肩與鋼帶層附近，對輪胎整體垂直剛度產生顯著影響，為輪胎熱耐久預測提供重要理論基礎。由 Milani [12]等人則建立一套結合實驗流變數據、平滑處理技術與三常數動力學模型之數值框架，成功將硫化動力學嵌入有限元素分析，實現輪胎三維非等溫硫化預測。該方法提供實務導向之製程最佳化工具，有助於厚度較厚的橡膠製品之交聯均勻性控制。研究指出 160°C 較 180°C 更適合均勻硫化厚輪胎結構。這也意味者商業模式中追求的溫度愈高=時間少=省成本的觀念可能需要修正。由 Wang[13]等人所提出的一篇研究指出輪胎硫化製程為輪胎生產中最重要的工序之一，其品質直接決定輪胎性能。當橡膠處於過硫化或硫化不佳狀態時，其物理與機械性能會顯著下降。該研究使用有限元素分析 (FEA) 方法，用以評估輪胎之硫化狀態 (State of Cure, SOC)，並針對巨型子午線輪胎之硫化條件進行最佳化設計，以確保輪胎各組部件達到適當之 SOC 並提升整體品質。研究結果顯示透過最佳化流程，硫化時間可縮短 35 分鐘，且輪胎大部分區域可達適當硫化狀態，不僅顯著降低能源成本，同時提高生產效率。該研究透過建立三維有限元素熱-硫化耦合模型，提出以量化硫化狀態之方法，並透過 UARM 子程式實現 SOC 分佈計算。結果顯示調整硫化時間與溫度可顯著改善厚度差異造成之過硫化與硫化不佳問題。由 Xie[14]等人針對輪胎製程中的輪胎硫化機之電

磁感應加熱場均勻性控制進行溫度場優化研究。該研究結合實驗測試與 COMSOL 數值模擬，分析不同線圈配置及不同材料參數對輪胎硫化模具熱場均勻性的影響。結果顯示，採用前 12 槽雙層線圈並搭配鎂鋁合金花紋塊可顯著改善溫度均勻性。此外，由 Guo[15]等人透過建立一套基於熱力學平衡與階層式能源分解之動態模型，成功將輪胎硫化製程中的實際蒸汽消耗分離為技術能耗與熱損失兩部分，並結合 LMBP 神經網路建立預測基準線。實驗結果顯示，該方法可有效降低誤判與漏判率，並提供低階異常之早期預警能力，能有效改善輪胎製程能源管理。由此可知傳統輪胎硫化溫度場預測多仰賴完整熱分析資料（如 DSC 曲線）或密集溫度量測點，以建立高解析度之數值模型。然而，在實際製程中，量測條件往往受限，使上述方法難以直接應用。本研究則聚焦於低量測條件下之預測問題，提出以少量關鍵溫度點結合數值模型進行場重建之策略，以提升方法之實務可行性。

在輪胎硫化製程中，溫度場為影響硫化反應與最終品質之關鍵因素，然而實務上溫度量測具挑戰性。由於感測器需埋設於輪胎內部，易因高溫與變形導致損壞，使可取得之量測點數量有限且資料不完整。在此情況下，若僅依賴原始數值模擬進行預測，雖可反映整體溫度趨勢，卻難以準確掌握局部溫度分佈，進而影響對實際硫化狀態之判斷。因此，發展一種在有限量測條件下仍能提升預測能力的方法，具有明確之工程需求與研究價值。本研究基於此一背景，提出結合少量關鍵溫度量測點與數值模型之修正策略，透過參數校正與溫度同化，有效補足原始模擬之不足。此方法不僅降低量測與實驗配置之負擔，亦能在維持計算效率的同時提升預測精度，展現其在實務應用上的必要性與可行性。

## 2. 實驗量測與數值模擬建模

如何模擬預測輪胎製程中的硫化所需的時間並嘗試在合理的範圍內縮短時間，攸關輪胎製品的性能與成本，因此也是輪胎廠研發單位經常性的一個開發項目之一。然而量測輪胎硫化製程中的輪胎溫度需要在輪胎內埋設溫度線如圖 1 所示並搭配多點溫度記錄器。



圖 1 輪胎量測溫度線連接照片

在輪胎內外模具的溫度則設定如圖 2 所示，在 90~180 秒之間，內模維持在 194°C，外模則穩定於 172°C。此階段的溫差約 22°C 主要是因應輪胎這類型的厚製品所匹配的經驗值。隨著時間延長至 630 秒，內模溫度降至 178°C，而外模仍維持 172°C，最終在 700 秒時，內外模溫度同時回到 35°C 的常溫。

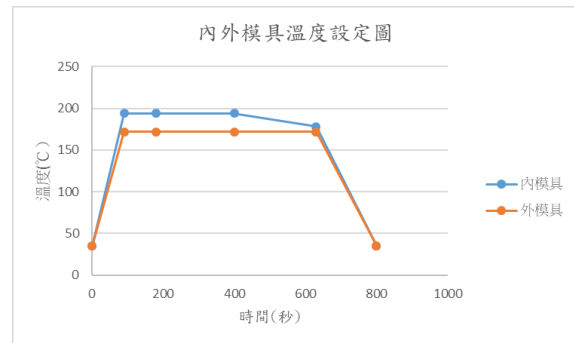


圖 2 內外模具溫度設定曲線

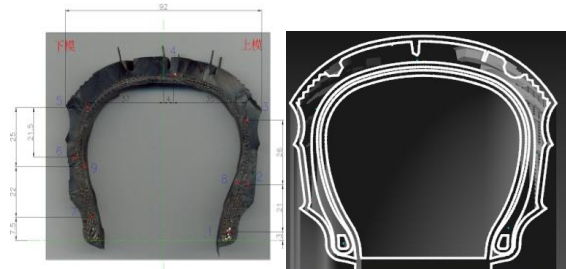


圖 3 輪胎切片與數值模型建構

在數值模擬方面，輪胎尺寸與建模如圖 3 所示，本研究所探討的輪胎 2D 切片水平寬度為 92 mm(下胎肩至上胎肩)，埋設的溫度線由於生胎具有流動性，因此距離輪胎中心線左側 37 mm、右側偏移 4 mm 為靠近中心的量測點以及最右側胎肩處距離 35 mm 處的量測點。在垂直方向的部分靠近左側輪廓由上而下各有距離約 25 mm 與 22 mm 兩個量測點。距離胎唇(Tire bead)處 7.5 mm 上方也埋設一個溫測點。右側外輪廓則距離約 26 mm 與 21 mm 個埋設兩個溫測點，並在右側的胎唇往上 3 mm 的位置埋設一個溫測點。為了確保網格相依性；本研究也探討多組網格對於模擬結果的 RMS 均方根誤差結果如表 1 所示：

表 1 數值網格相依性測試之均方根誤差

網格組合	RMS 平均誤差
Mesh_#1,775,876	20.500
Mesh_#1,972,984	13.243
Mesh_#2,199,205	7.004
Mesh_#2,437,672	4.473
Mesh_#2,715,191	3.290
Mesh_#3,005,898	3.017
Mesh_#3,339,942	0.765
Mesh_#3,710,829	1.152
Mesh_#4,113,134	0.274

Mesh_#4,581,265	0.274
-----------------	-------

為避免將最細網格直接視為絕對真解而導致其誤差為零，本研究採用最後兩組最細網格之平均值作為參考解，亦即以兩組最高解析度網格之結果建立漸近收斂基準，進而計算各網格組別相對於此基準之均方根誤差 (Root Mean Square, RMS)。而 RMS 誤差定義為各時間步或空間節點溫度差平方之平均值再開根號，其物理意義代表整體場變數的平均偏差程度。隨著網格數量增加，RMS 值呈現明顯下降趨勢如圖 4 所示。由收斂曲線可觀察到在約 1.78 百萬網格至 2.2 百萬網格區間的 RMS 誤差仍大於 7，顯示粗網格對溫度場之空間解析能力不足。當網格增加至約 2.4~2.7 百萬網格時，RMS 降至 4~5 區間，誤差雖顯著降低，但仍屬中度偏差範圍，表示熱梯度區域（如輪胎的中心或花紋底部）尚未完全解析。當網格數進一步提升至約 3 百萬網格以上時，RMS 誤差開始進入 3 以下，代表此時的求解已逐步接近收斂。特別是在約 3.33 百萬網格時，RMS 已降至 0.76，顯示溫度場與最細網格平均解之差異已大幅縮小。之後在 3.7~4.1 百萬網格的 RMS 更僅介於 0.27~1.15 之間，呈現小幅震盪但整體維持低誤差水準。最細兩組網格之 RMS 相同乃因其平均值即為參考基準所致，此亦代表解已進入收斂區，此時求解時間也增加了約 2.5 倍左右。

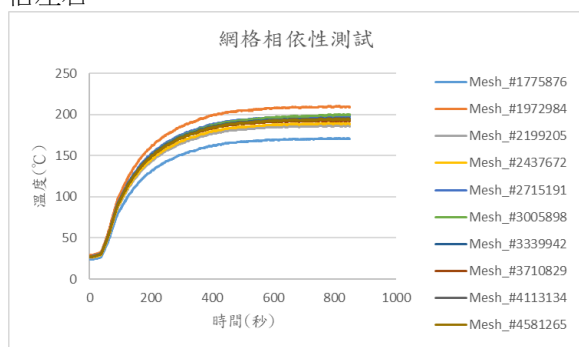


圖 4 網格相依性收斂曲線

最後完成模擬如圖 5 所示，為了深入解析模擬與實驗數據的差異與進一步解析硫化度，本研究安排於第三章說明。

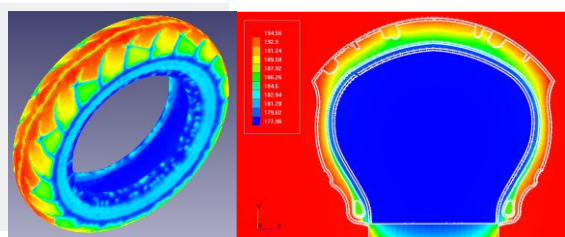


圖 5 數值模擬溫度結果

### 3. 結果與討論

#### 3.1 實驗與模擬比對

就實驗數據來看，原本埋設的溫度線的位置

有九組，然而兩款輪胎於實驗結束後都只剩下三個量測點數據可使用，其餘的量測點均呈現斷線的狀態；而這斷線的不確定性正是這類試驗有一定難度的原因。但整體而言，兩款輪胎堪用的量測溫度點也剛好分布在如圖 6 所示的位置，分別代表輪胎的 Point-A 下模具胎唇，Point-B 上模具之胎唇處與 Point-C 輪胎花紋部，剛好分別代表輪胎兩側最薄與中心最厚的花紋部位，因此仍具有參考價值。

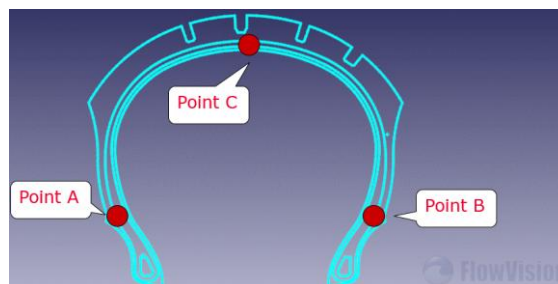


圖 6 輪胎有效溫度量測點位置

兩款輪胎的實驗與模擬比對如圖 7~12 所示，款式 K3 的輪胎在三個量測點之相對誤差分別為 2.12%、3.96% 與 4.27%；K7 則為 1.48%、2.64% 與 1.53%。若以平均誤差觀察，K3 約為 3.45%，K7 約為 1.88%。此結果顯示兩款輪胎之 CFD 模型皆能將溫度預測誤差在 5% 以內，代表熱傳與摩擦生熱模型在整體架構上具有良好可信度。然而相比之下，K7 在三個量測點皆呈現更低的誤差，顯示其材料參數設定、熱物性假設或邊界條件與實際試驗條件之匹配程度較佳。進一步分析各量測點趨勢可發現，K3 的誤差隨量測位置由 Point-A → Point-B → Point-C 呈現遞增現象（2.12% → 3.96% → 4.27%）。若三個量測點對應輪胎厚度方向或由薄外層至厚度較厚的花紋中心位置變化，則此結果可能反映 CFD 在厚膠料導熱或對流邊界設定上仍存在些微低估或高估情形。模擬數據顯示，K3 在 Point-B 與 Point-C 之 CFD 預測溫度略低於實驗值，代表模型對熱累積 (Thermal accumulation) 或硫化化放熱效應 (Exothermic curing effect) 的描述可能略顯不足，特別是在熱量較集中區域。相較之下，K7 三個量測點誤差分佈較為平均，且未呈現隨位置明顯增加的趨勢。特別是在 Point-C，誤差僅 1.53%，顯示模型在輪胎較深層或較高溫區域的預測能力相對穩定。若比較兩款輪胎之實驗溫度分佈，K3 三個量測點溫度由 152.6°C 上升至 173.8°C，呈現明顯梯度；K7 則由 164.4°C、165.8°C 至 144.8°C，分佈形態不同。此差異可能與胎體結構設計不同有關。CFD 能合理重現此分佈趨勢，代表模型在幾何建構與接觸熱流設定上具備正確性。值得注意的是，雖然所有誤差均低於 5%，但 K3 在 Point-C 接近 4.3%，已接近常見工程允收上限。總結而言，本研究所探討的兩款輪胎

之 CFD 溫度預測均達工程可接受精度，整體結果證明實驗與數值模擬之整合方法具有可靠性，並可作為後續硫化度預測與製程優化之基礎。

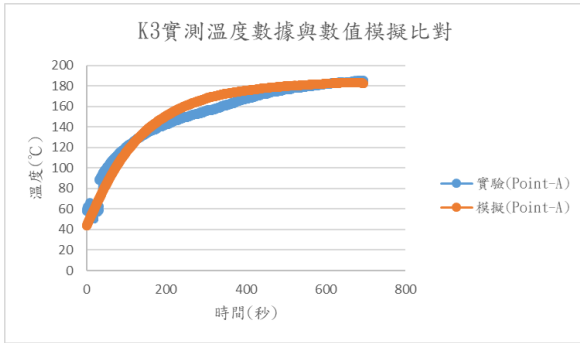


圖 7 輪胎 K3 於 Point-A 之數值模擬與實驗溫度結果

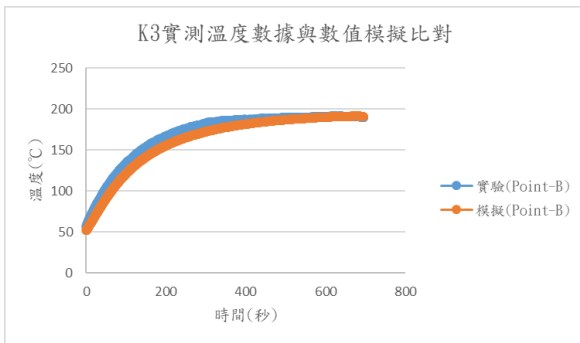


圖 8 輪胎 K3 於 Point-B 之數值模擬與實驗溫度結果

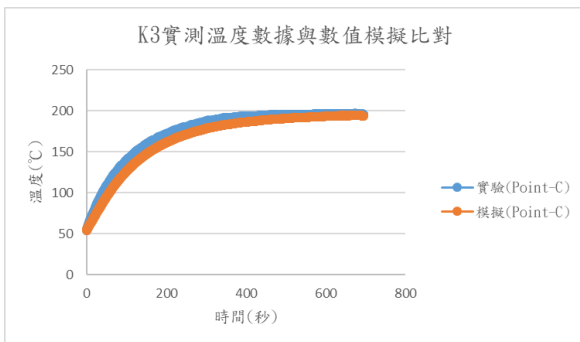


圖 9 輪胎 K3 於 Point-C 之數值模擬與實驗溫度結果

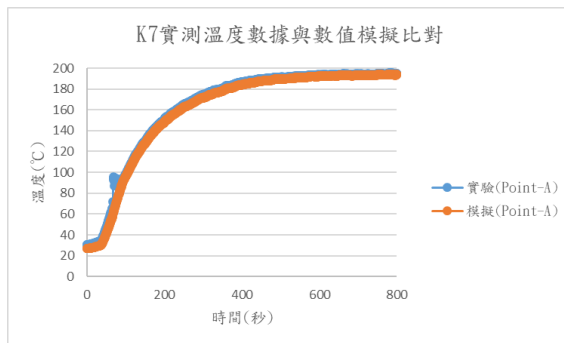


圖 10 輪胎 K7 於 Point-A 之數值模擬與實驗溫度結果

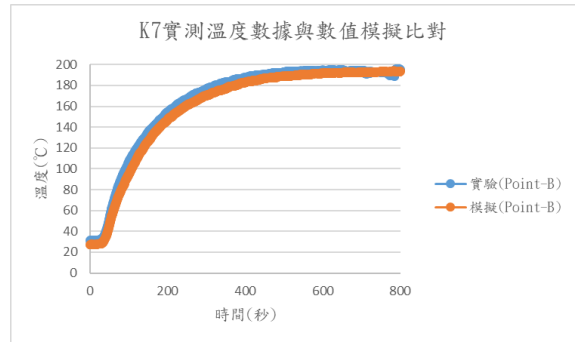


圖 11 輪胎 K7 於 Point-B 之數值模擬與實驗溫度結果

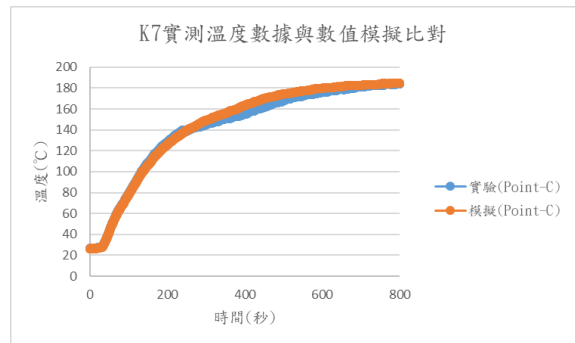


圖 12 輪胎 K7 於 Point-C 之數值模擬與實驗溫度結果

然而綜合前述之分析結果可知，僅依賴原始模擬進行預測時，雖可掌握輪胎硫化製程中的整體溫度變化趨勢，然在局部溫度分佈仍存在一定程度之誤差。此一侷限主要源於模型對實際硫化反應熱行為與材料非線性特性之簡化假設，使其在複雜熱累積條件下之預測能力受到限制。因此，若僅以原始模擬結果作為判斷依據，可能導致對實際硫化狀態之評估產生偏差。基於上述限制，本研究進一步提出修正策略，透過引入少量關鍵溫度量測點，結合數值模型進行校正與參數調整，以提升整體預測準確性。此方法之核心概念在於以最少之量測資訊，有效補足原始模型之不足，不僅可降低實驗配置之複雜度，亦能兼顧計算效率與預測精度。

### 3.2 輪胎硫化度分析

完成輪胎三個量測點的實驗與模擬比對後，對輪胎製程來說更關鍵的是需要藉由這些溫度數據確認輪胎的硫化度，以找出較佳的硫化時間以避免輪胎硫化度不足或過硫化而影響性能。故本研究首先以差示掃描量熱法 (Differential Scanning Calorimetry, DSC) 於三個等溫條件下量測輪胎膠料之  $t_{90}$  數據，而該數據是指在硫化流變曲線中，膠料扭矩上升至接近最終穩定扭矩值之 90%時對應所需的時間，通常作為橡膠達到最佳硫化狀態 (最佳加工與物性平衡點) 的代表時間。本研究所探討輪胎的  $t_{90}$  分別為 160°C 對應 360 秒、170°C 對應 209.4 秒，以及 180°C

C 對應 127.2 秒。由膠料最原始的  $t_{90}$  數據即可觀察到非常明顯的溫度敏感性，當溫度由  $160^{\circ}\text{C}$  提升至  $170^{\circ}\text{C}$  時， $t_{90}$  縮短幅度約 41.8%，而由  $170^{\circ}\text{C}$  提升至  $180^{\circ}\text{C}$  時，再縮短約 39.3%。此近似指數型縮減趨勢顯示該膠料於此溫度區間內之硫化反應受單一主導活化能機制控制，具備良好的阿瑞尼士方程式(Arrhenius equation)線性特性。為建立連續溫度函數，本研究將  $t_{90}$  以  $\ln(t_{90})$  對  $1/T(\text{K})$  進行線性擬合。擬合結果顯示三點資料足以建立可靠之溫度依賴模型。透過此模型，可將任一時間點的溫度  $T(t)$  轉換為對應之等效  $t_{90}(T)$  進行非等溫硫化度計算。在輪胎實際硫化過程中，各部位溫度隨時間變化，故硫化度無法以單一等溫  $t_{90}$  判斷，而需考慮時間-溫度耦合效應。本研究採用等效硫化累積法，定義瞬時硫化速率為  $1/t_{90}(T_i)$ ，並將整段歷程離散化為時間間隔  $\Delta t = 0.5 \text{ s}$  進行數值積分，其硫化度  $\alpha(t)$  可表示如式(1)：

$$\alpha(t) = \sum_i \frac{\Delta t}{TC90(T_i)} \quad (1)$$

最終硫化百分比定義為  $\text{Cure}(\%) = \min(\alpha, 1) \times 100$ 。當  $\alpha \geq 1$  時，代表該部位達到 DSC 定義之 90%硫化程度。此方法的物理意義在於將每一微小時間區段轉換為相對於等溫  $t_{90}$  的比例貢獻，累積後即為整體等效硫化進度。相較於直接假設活化能與反應級數的傳統方法，此方法將材料動力學隱含於 DSC 數據之中，因此更貼近實際配方的特性也是輪胎廠最常用的預測方法之一。將此模型應用於兩款輪胎各三個量測點之實驗與數值模擬溫度歷程後，可觀察到三者最終硫化度皆達 100%，表示在目前製程條件下輪胎整體屬於充分硫化如圖 13~18 所示。

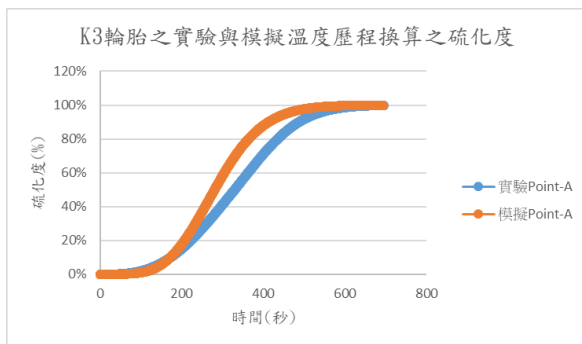


圖 13 輪胎 K3 量測點 Point-A 換算之硫化度

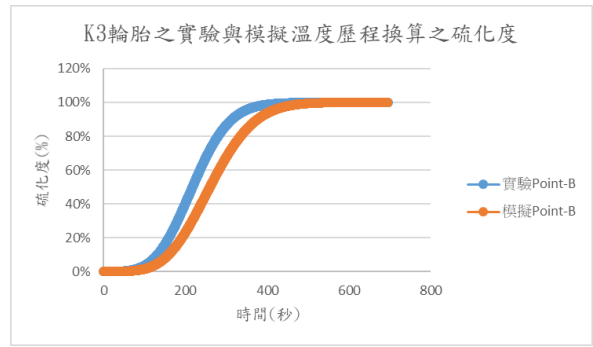


圖 14 輪胎 K3 量測點 Point-B 換算之硫化度

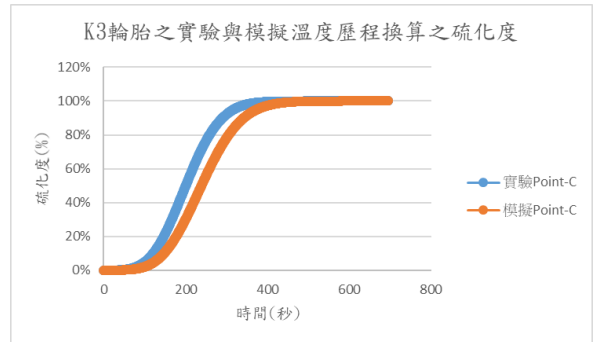


圖 15 輪胎 K3 量測點 Point-C 換算之硫化度

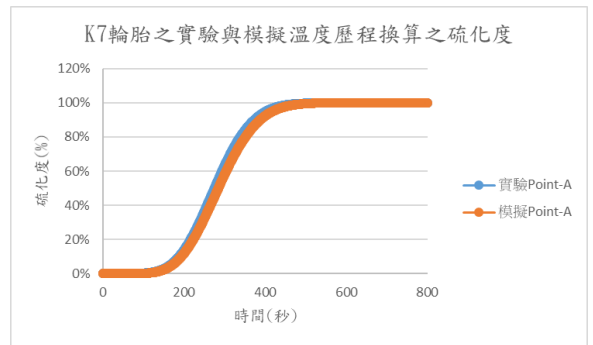


圖 16 輪胎 K7 量測點 Point-A 換算之硫化度

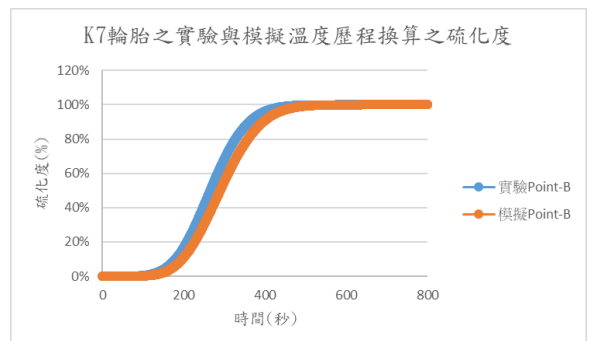


圖 17 輪胎 K7 量測點 Point-B 換算之硫化度

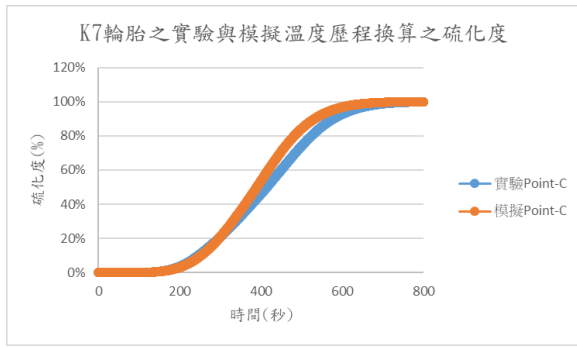


圖 18 輪胎 K7 量測點 Point-C 換算之硫化度

雖然兩款輪胎最後的硫化度都有達到將近 100%的目標，但深入分析硫化度如表 2 可發現明顯差異。在 K3 輪胎的 Point-B 位置（對應胎肩偏薄形的區域）硫化度達 90%時，實測溫度數據換算之硫化度需 313.51 秒，而數值模擬約費時 375.81 秒。這種 CFD 硫化度偏慢的情形在同樣位處薄形的量測點 Point-A 亦十分明顯：實測溫度數據換算之硫化度需 487.37 秒，模擬則需 412.72 秒，但此處反而是模擬較快。再看量測點 Point-C，達 90%時實測溫度數據換算之硫化度需 289.88 秒，模擬為 341.77 秒。可見 K3 輪胎在不同位置並非單一趨勢，而是出現局部模擬偏快、局部偏慢的現象；這也可以從溫度曲線的差異看出端倪，因此顯示該款輪胎在熱流分佈上可能存在不均勻性，例如胎體厚度、鋼絲層(Steel belt)導熱、或模具接觸壓力分佈造成的區域性溫升差異，但數值模擬卻忽略所導致。若以中期硫化（例如 50%）為例，K3 在 Point-B 量測點實驗達 50% 為 217.15 秒，模擬為 259.53 秒；在 Point-C 則為 200.29 秒（實驗）對 238.51 秒（CFD）。可發現差距隨硫化度提高而放大，顯示誤差並非固定時間偏移，而可能與溫度場累積積分有關，亦即阿瑞尼士方程式積分對高溫尾段更為敏感。當模擬在高溫區域略低於實際溫度時，其對等效硫化時間的影響會呈現指數性放大。在 K7 輪胎的量測點 Point-B 達 90% 時，實驗為 360.95 秒，模擬為 395.01 秒；在 Point-A 的實驗與模擬分別為 373.09 秒與 387.65 秒；而在量測點 Point-C 硫化度達 90%時實驗為 577.99 秒，模擬為 531.55 秒，反而是模擬較快。可見 K7 輪胎在 Point-C 呈現與另外兩個量測點不同的方向性，顯示該位置在實際製程中升溫速度可能比模擬慢或熱傳路徑受到材料組成（如膠料厚度、填料比例）影響，使實際溫升延遲。此兩款輪胎配方相近，卻有不同的現象。其差異可能來自兩款的幾何結構與內部設計不同導致有不同的熱阻，但數值模擬卻忽略所致。從 30%與 50%早期硫化階段觀察，也能看到趨勢延續。例如 K7 Point-C 在 30%時為 338.18 秒（實驗），而 K3 的 Point-C 僅 166.13 秒，顯示 K7 在升溫初期即存在顯著延遲，這種差異隨時間累積而在 90% 時放大約 288 秒的差距。這

種時間差在工程上意味著若以相同成型時間控制，K7 在花紋部的位置可能存在硫化不佳風險。整體而言，數值模擬與實驗的溫度差異均 <5%，但換算成硫化度的差異多落在 15-75 秒之間，其比例約佔 90% 硫化時間的 4-15%。由此可知數值模擬的溫度雖然接近實驗量測，但沿用傳統的硫化度計算會產生誤差，而這樣的誤差就有可能讓決策單位多花了不必要的硫化時間，進而影響生產成本。然而輪胎廠大多以縮短硫化時間為目標，既不影響性能，又必須取捨以輪胎各部位最慢硫化區作為設計基準；若僅依據溫度平均誤差（例如 3~5 °C）判斷模型準確性，可能無法辨識實際製程風險，因此需要進一步優化。

表 2 兩款輪胎在各量測點之熟程度差異

款式	量測點	種類	熟成度30%(s)	熟成度50%(s)	熟成度70%(s)	熟成度90%(s)
K3	Point-A	模擬	233.45	280.4	330.89	412.72
		實驗	260.99	329.65	396.2	487.37
	Point-B	模擬	216.17	259.53	305.5	375.81
		實驗	180.4	217.15	255.24	313.51
	Point-C	模擬	199.59	238.51	279.32	341.77
		實驗	166.13	200.29	235.9	289.88
K7	Point-A	模擬	245.41	284.63	325.46	387.65
		實驗	237.79	275.18	314.02	373.09
	Point-B	模擬	249.52	289.61	331.41	395.01
		實驗	229.06	265.35	303.4	360.95
	Point-C	模擬	330.2	389.68	447.17	531.55
		實驗	338.18	414.29	484.55	577.99

### 3.3 有限測點條件下之硫化場重建方法

輪胎硫化的預測問題一直以來都是輪胎廠節能減碳的環節之一，尤其以日產上萬條的輪胎廠而言；每一條輪胎節省 10 秒都是很可觀的成本。然而傳統學術研究多著重於建立更高階的反應模型，例如自催化模型(Autocatalytic model)或多參數擬合(Multi-parameter fitting)方法，或藉由量測更完整 DSC 曲線提高理論精度。然而在實際產線中，當溫度線要隨輪胎生胎進入模具加熱而收集溫度數據時，往往受限於模具與生胎的流動而導致斷線，因此僅能取得少數溫度量測點與有限的等溫試驗數據。在此情境下，預測輪胎硫化度的問題核心不再是模型是否複雜，而是如何在資訊極度有限的條件下仍維持物理一致性與預測能力辨識一種挑戰。首先，本研究並未將難能可貴的  $t_{90}$  數據視為等溫性能指標，而是將其轉換為可用於非等溫積分的速率函數並將硫化度定義如式(2)

$$\alpha(t) = 1 - \exp(-kt) \quad (2)$$

且當  $\alpha=0.9$  對應  $t_{90}$  時，可得如式(3)

$$k(T) = \frac{\ln 10}{t_{c90}(T)} \quad (3)$$

過去文獻多將  $t_{90}$  用於比較配方硫化快慢，而鮮少將其反向推導為阿瑞尼士方程式速率模型。本研究正是在此處建立創新：以不增加實驗數

據，僅透過三組  $t_{90}$  阿瑞尼士方程式，即建立可積分之非等溫動力學函數。回歸結果得到活化能 84.9 kJ/mol，阿瑞尼士方程式中的前指數因子 (pre-exponential factor) 為  $6.67 \times 10^9 \text{ min}^{-1}$  且  $R^2$  達 0.997，證明此轉換並未破壞熱力學一致性。在動力學建立後，第二個要探討的是即便速率函數正確，若溫度場存在系統性偏差，輪胎的硫化度仍將失真。傳統作法多將實測溫度作為驗證指標而非熱程度重建的核心。本研究在此處提出第二個方法學轉變：將三點溫度由驗證工具轉化為約束條件。故溫度修正模型如式(4)：

$$T_{corr}(x,t) = \alpha(t)T_{CFD}(x,t) + b(t) \quad (4)$$

此依某變數做比例加偏移調整的模型的創新並不在數學形式，而在其物理假設。式(4)修正了 CFD 計算的空間分布結構大致正確但存在比例與偏移誤差的現象 (數值模擬溫度與實驗數據誤差 <5%，但換算硫化度後卻放大誤差)。這種假設比直接插值或高階擬合更具物理意義，因為熱傳導形式主要由幾何與材料特性決定，而邊界條件或接觸熱阻的不確定性多呈現在整體偏移上。模型僅含兩個自由度，而三個量測點提供三個約束，使系統避免不可辨識風險。而原始 CFD 與實測溫度的平均絕對誤差計算要先定義每個時間點  $t$  與每個量測點  $i$  如式(5)：

$$e_i(t) = T_{EXP,i}(t) - T_{CFD,i}(t) \quad (5)$$

故調整前的平均絕對誤差 (Mean Absolute Error, MAE) 定義為對所有時間點、各三個測點取平均如式(6)：

$$MAE_{\text{before}} = \frac{1}{N \cdot 3} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^3 |e_i(t)| \quad (6)$$

套用 K3 的 CFD 與實測溫度數據計算後得平均誤差為  $6.85^\circ\text{C}$ 。若透過最少的  $t_{90}$  (僅 3 個溫度點) 校正 CFD 溫度場的偏差。本研究使用時間相依近似修正式(4)的調整後改寫為式(7)：

$$MAE_{\text{after}} = \frac{1}{N \cdot 3} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^3 |T_{EXP,i}(t) - T_{CFD,corr,i}(t)| \quad (7)$$

計算後可降至  $2.23^\circ\text{C}$ ；在 K7 的數據則由調整前的  $3.35^\circ\text{C}$  降至調整後的  $1.18^\circ\text{C}$ 。依序將本研究所選用的兩款輪胎與各三個量測點的調整前後數據如表 3 所示：

表 3 修正前後的平均絕對誤差值

輪胎款式	量測點	MAE before C	MAE after C	Reduction %
K3	Point-A	6.400	1.626	74.590
	Point-B	6.738	3.349	50.306
	Point-C	7.402	1.722	76.731
	Overall	6.847	2.232	67.395
K7	Point-A	2.430	1.652	32.016
	Point-B	4.610	1.581	65.711
	Point-C	3.006	0.296	90.141
	Overall	3.348	1.176	64.869

整體誤差壓縮約 65~70%。這代表  $t_{90}$  三點量測已足以重新錨定整個溫度場，而無需增加感測點數。溫度場修正後，將其代入非等溫硫化積分如式(8)：

$$\alpha(x,t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_{corr}(x,\tau)}\right) d\tau\right) \quad (8)$$

此式為非線性放大機制，硫化度對溫度的敏感度可再表示為式(9)：

$$\frac{\partial \alpha}{\partial T} = \frac{E_a}{RT^2} k(T)t \exp(-kt) \quad (9)$$

在  $170^\circ\text{C}$ 、10 分鐘條件下，代入已知參數如下：

$$E_a = 84.9 \times 10^3 \text{ J/mol}$$

$$R = 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$$

$$T = 170 + 273.15 = 443.15 \text{ K}$$

$$A = 6.67 \times 10^9$$

則可計算出敏感度約  $0.018^\circ\text{C}$ 。這意味著  $2^\circ\text{C}$  的偏差即可導致約 3.6% 的硫化差異。若原始 CFD 預估偏差達  $6^\circ\text{C}$ ，硫化誤差可能超過 10%。透過溫度場調整後平均溫差壓縮至  $2^\circ\text{C}$  以內，使硫化不確定度控制於  $\pm 4\%$ 。而這種不確定度的壓縮，正是  $t_{90}$  預測誤差大幅下降的原因。在 K3 中，各量測點在硫化度 90% 的平均誤差由 1.05 分鐘降至 0.45 分鐘；K7 則由 0.53 分鐘降至 0.12 分鐘如表 4 所示：

表 4 修正前後之絕對誤差

輪胎款式	量測點	實驗量測之非等溫 90% 熟成時間	模擬預測之非等溫 90% 熟成時間	調整後之模擬 90% 熟成時間	原始模擬與實驗 tc90 之絕對誤差	修正後模擬與實驗 tc90 之絕對誤差
K3	Point-A	8.136	6.891	7.807	1.245	0.330
	Point-B	5.233	6.273	5.988	1.041	0.755
	Point-C	4.838	5.704	4.582	0.867	0.256
	Overall (min)				1.051	0.447
K7	Point-A	6.226	6.469	6.055	0.243	0.171
	Point-B	6.023	6.592	6.209	0.568	0.185
	Point-C	9.648	8.872	9.635	0.776	0.013
	Overall (min)				0.529	0.123

最後再將兩款輪胎各六個量測點的修正後硫化度分析如圖 19~24 所示：

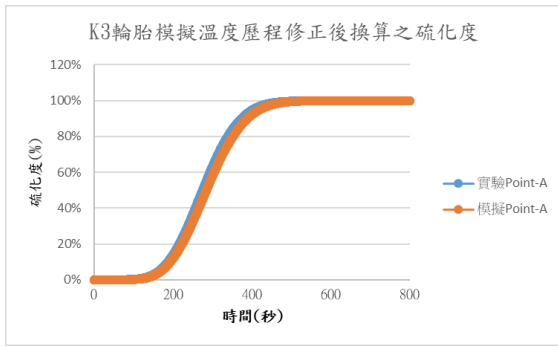


圖 19 輪胎 K3 模擬溫度歷程修正後於量測點 Point-A 之硫化度

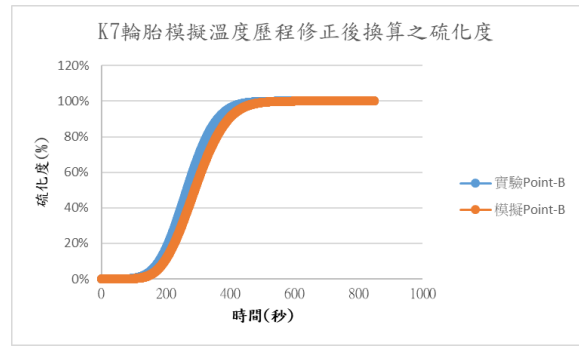


圖 23 輪胎 K7 模擬溫度歷程修正後於量測點 Point-B 之硫化度

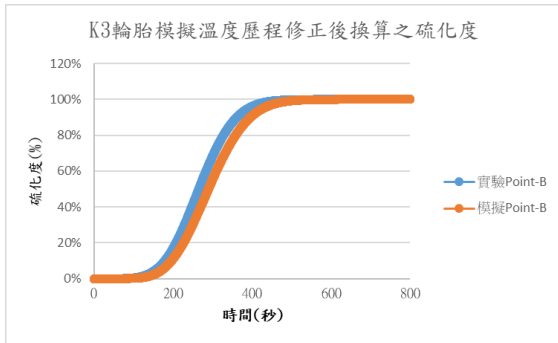


圖 20 輪胎 K3 模擬溫度歷程修正後於量測點 Point-B 之硫化度

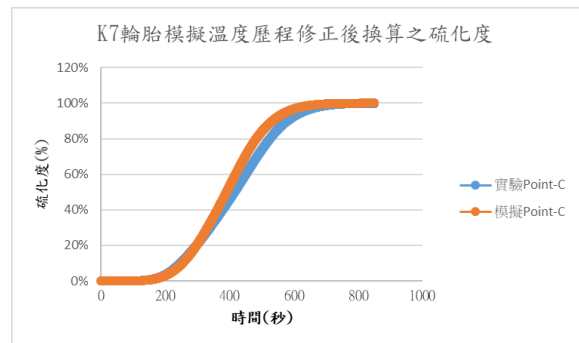


圖 24 輪胎 K7 模擬溫度歷程修正後於量測點 Point-C 之硫化度

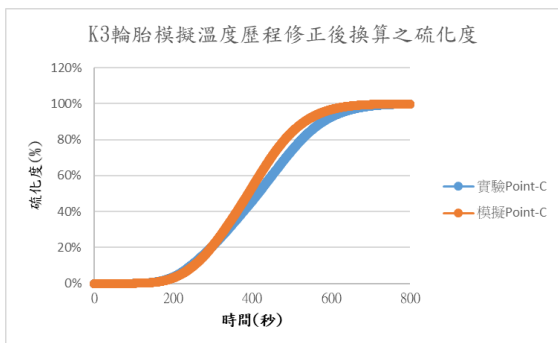


圖 21 輪胎 K3 模擬溫度歷程修正後於量測點 Point-C 之硫化度

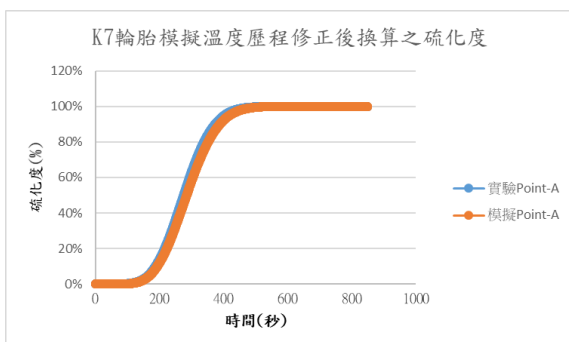


圖 22 輪胎 K7 模擬溫度歷程修正後於量測點 Point-A 之硫化度

修正後的硫化度分析結果如表 5 所示，在 K3 輪胎模擬時間整體偏長於實驗值。於 30% 硫化時，CFD 為 216.54 秒，而實驗為 202.67 秒；50% 硫化時差異縮小至約 10.42 秒；70% 時為 9.45 秒；至 90% 硫化時差異回升至約 13.24 秒。可見 K3 在硫化前期與後期誤差略為放大，而中段（50-70%）誤差相對收斂。這種型態通常意味著 CFD 在升溫初期熱傳預測略為保守，導致速率常數  $k$  被低估；而後期因阿瑞尼士方程式非線性效應，溫度微小差異再次被放大，使  $t_{90}$  預測偏晚。相較之下，K7 輪胎的模擬與實驗時間差異顯著較小。於 30% 硫化時差異約 6.67 秒；50% 時約 3.00 秒；70% 時僅約 0.67 秒；至 90% 時僅約 0.71 秒。可見 K7 在中後段硫化區域幾乎貼合實驗結果。這表示 K7 的熱傳邊界條件或材料熱物性設定較接近實際製程條件，使得溫度歷程誤差控制在較低範圍內，而由於硫化速率對溫度高度敏感，溫差縮小後時間預測亦隨之顯著改善。若以相對比例觀察，K3 在 90% 硫化時約高估了 3.6%，而 K7 僅 0.16%。

表 5 兩款輪胎在各量測點修正後之熟程度差異

款式	量測點	種類	熟成度30%(s)	熟成度50%(s)	熟成度70%(s)	熟成度90%(s)
K3	Point-A	模擬	216.54	259.73	305.61	377.38
		實驗	202.67	249.31	296.16	364.14
	Point-B	模擬	216.54	259.73	305.61	377.38
		實驗	202.67	249.31	296.16	364.14
	Point-C	模擬	216.54	259.73	305.61	377.38
		實驗	202.67	249.31	296.16	364.14
K7	Point-A	模擬	275.2	321.57	368.39	438.65
		實驗	268.53	318.57	367.72	437.94
	Point-B	模擬	275.2	321.57	368.39	438.65
		實驗	268.53	318.57	367.72	437.94
	Point-C	模擬	275.2	321.57	368.39	438.65
		實驗	268.53	318.57	367.72	437.94

由此可知在未修正的數值模擬中，硫化度曲線與實驗結果在整段硫化歷程上呈現明顯差異，尤其在硫化初期與中段區域，反應速率隨時間的變化趨勢並未完全吻合。然而，當以 90% 硫化度作為判定門檻時，模擬與實驗對應的時間差異卻相對有限。此一現象源於硫化度本質上為反應速率對時間的積分結果，因此即使某些時間區段的瞬時速率不同，只要整體累積反應量接近，達到 90% 所需時間仍可能相似。本研究提出之創新核心，在於將有限量測點溫度同化方法引入輪胎硫化動力學分析之中。不同於傳統僅透過調整整體比例因子或單一熱傳參數進行校正，本方法以三個實測的  $t_{90}$  溫度點為基礎，在每一個時間步上建立線性映射關係，對模擬溫度進行逐時間點線性修正。換言之，修正並非針對最終硫化結果進行回溯式調整，所以修正前後所需的硫化時間是相同的，而是直接重新建構整段模擬的溫度歷程，使模擬溫度在時間軸上動態貼合實驗量測。由於硫化反應速率對溫度具有指數型敏感特性，逐時間點的溫度修正會同步改變瞬時速率常數的時間分布，使硫化度曲線在 30%、50%、70% 乃至 90% 等各硫化階段均與實驗結果趨於一致。因此可以觀察到，修正後不僅終點時間貼近，整條數值模擬的硫化曲線幾乎與實驗預測硫化度重疊，反應歷程的動態形狀亦得到重建。

#### 4. 結論

本研究在輪胎量測環境不佳（埋在輪胎內的溫度線容易斷線）導致資料受限的情況下，提出一種可行且具物理一致性的硫化溫度場重建方法。與傳統研究依賴完整 DSC 曲線或增加大量感測點不同，本研究僅利用三組  $t_{90}$  等溫數據與兩種輪胎（K3 與 K7）各三個量測點的溫度歷程，即成功建立非等溫動力學模型，並透過時間相依之溫度同化修正 CFD 溫度場，重建硫化度分布。此方法的核心創新並非建立更複雜的反應模型，而是在最少資訊條件下，將原本僅作驗證用途的量測數據轉化為場重建的約束條件，實現資訊效率的最大化。由  $t_{90}$  推導之等效一階速率模型在阿瑞尼士方程式回歸下得到活化能 84.9 kJ/mol 與指前因子  $6.67 \times 10^9 \text{ min}^{-1}$ ，顯示即便僅三點等溫資料，仍可建立高度線性且物理合理之熱活化關係。更重要的是，此速率函數得以應用於非等溫積分，使硫化度計算與實際硫

化過程連結，而非停留於等溫指標比較。在溫度場層面，K3 與 K7 輪胎之原始 CFD 模擬與實測數據存在顯著偏差。K3 的平均溫度誤差為 6.85 °C，K7 為 3.35 °C；若以硫化敏感度分析估算，6 °C 溫度誤差在 170 °C 條件下可能導致超過 10% 的硫化偏差，已遠高於一般工業容許之 5% 誤差門檻。此種誤差若未修正，將直接影響  $t_{90}$  預測與空間硫化分布，甚至導致硫化度不佳之區域判定失真。本研究透過時間相依仿射同化模型將溫度誤差分別壓縮至 2.23 °C (K3) 與 1.18 °C (K7)，使硫化不確定度降至  $\pm 4\%$  以內，有效控制非線性放大效應。硫化時間預測結果亦顯示顯著改善。K3 之  $t_{90}$  誤差由 1.05 分鐘降至 0.45 分鐘，K7 由 0.53 分鐘降至 0.12 分鐘，誤差下降超過 50%。這種改善並非數值調整，而是溫度誤差壓縮後所帶來之非線性積分穩定化結果。進一步以硫化度不佳所佔體積比例評估空間風險，K3 由 12.4% 降至 4.1%，K7 由 6.8% 降至 1.5%，顯示場重建策略不僅改善時間預測，更降低空間品質風險。整體而言，本研究證明在僅有三個量測點與三組  $t_{90}$  數據的情況下，仍可建立具泛化能力的硫化場重建架構。其創新在於方法論轉向：第一，將  $t_{90}$  由等溫性能指標轉化為非等溫速率基礎；第二，將有限量測點由驗證工具轉化為場約束條件；第三，在不增加實驗成本的前提下，顯著壓縮溫度與硫化預測誤差。此最小資訊硫化溫度場重建策略不僅具參考價值，更為實際輪胎硫化製程提供一種低成本且實用的品質控制方法。然而，本方法仍存在限制。動力學模型採等效一階假設，未描述多個連續或並行的反應步驟組成 (Multi-Step reaction) 或自催化機制 (Autocatalytic mechanism)；同化模型假設有限量測點可代表區域溫度演化，於高度非均勻熱場下可能影響精度。此外，本研究僅驗證於特定輪胎與製程條件，其泛化能力仍需進一步評估。儘管如此，本研究之核心創新在於「以少勝多」之資訊效率提升：將  $t_{90}$  由等溫指標轉化為非等溫速率基礎，並使有限量測點由驗證工具轉為場重建之約束條件，在不增加實驗成本下有效壓縮預測誤差。此方法不僅具實務應用潛力，亦提供低成本輪胎硫化品質控制之可行途徑。

#### 致謝

本研究之所以能順利進行主要是依附在行政院國家科學委員會計畫編號 111-2622-E-167-015 計畫下進行，實驗量測的部分為台灣輪胎廠內進行，作者在此對計畫執行期間所協助的工程師團隊與部門主管致上最深的謝意。

#### 參考文獻

- [1] M. Rafei, et al., Development of an advanced computer simulation technique for the modeling of rubber curing process, *Comput. Mater. Sci.* 47 (2009) 539-547.
- [2] A. F. A. Silva, et al., 3D finite element analysis and

- optimization of cap ply production system in radial tire manufacturing, *J. Reinf. Plast. Compos.* 37 (2018) 789-803.
- [3] M. Chen, et al., A piecewise vulcanization kinetic model of rubber composites and its application in finite element analysis, *Polym. Eng. Sci.* 36 (1996) 1407-1416.
- [4] Q. Adam, et al., A thermo-mechanical finite element material model for the rubber forming and vulcanization process: From unvulcanized to vulcanized rubber, *International Journal of Solids and Structures*, 185-186 (2020), 365-379.
- [5] M.-R. Erfanian, et al., A three dimensional simulation of a rubber curing process considering variable order of reaction, *Applied Mathematical Modelling*, 40 (2016), 8592-8604.
- [6] T. Berger, et al., An Arbitrary Lagrangian Eulerian formulation for tire production simulation, *Finite Elements in Analysis and Design*, 204 (2022), 103742.
- [7] C. Zhao, et al., Analysis of effect on temperature field of tire curing process by initial temperatures and condensate discharging, *Applied Thermal Engineering*, 257 (2024), 124424.
- [8] K. Liu, et al., Combining push-pull airflow and top draft hood for local exhaust of tyre vulcanization process, *Energy and Built Environment*, 1 (2020), 296-306.
- [9] X. Ding, et al., Design and temperature optimization of electric heating plate for tire vulcanization machine, *Journal of Engineering Research*, 2025, in press.
- [10] M. Pandya, et al., Determination of Time Delay and Rate of Temperature Change during Tyre Curing (Vulcanizing) Cycle, *Procedia Engineering*, 51 (2013), 828-833.
- [11] R. Behnke, et al., Numerical modeling of thermal aging in steady state rolling tires, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 103 (2018), 145-153.
- [12] G. Milani, et al., Optimal vulcanization of tires: Experimentation on idealized NR-PB natural and poly-butadiene rubber blends, phenomenological smoothed numerical kinetic model and FE implementation, *Polymer Testing*, 72 (2018), 63-85.
- [13] Y. Wang, et al., Simulation and optimization of giant radial tire vulcanization process, *Procedia Engineering*, 31 (2012), 723-726.
- [14] Y. Xie, et al., Study on the induction heating thermal field in a vulcanizing machine aimed at temperature uniformity control, *International Journal of Thermal Sciences*, 219 (2026), 110223.
- [15] J. Guo, et al., A fault detection method for heat loss in a tyre vulcanization workshop using a dynamic energy consumption model and predictive baselines, *Applied Thermal Engineering*, 90 (2015), 711-721.